Definition: Låt $u : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ vara ett vektorfält av klass C^1. Då definieras divergensen av u som

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

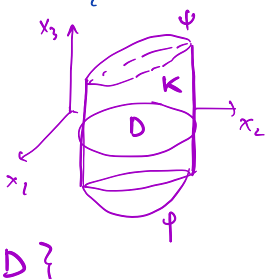
Ex: $u(x) = (x_2^2 x_1 \,,\, x_1 x_3 \,,\, \sin x_3)$

$$(\operatorname{div} u)(x) = x_2^2 + 0 + \cos x_3 = x_2^2 + \cos x_3 .$$

$$\operatorname{div} u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} .$$

Sats (Gauss sats / Divergenssatsen):
Låt u vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Om det kompakta området $K \subset \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1-ytor som är orienterade med utåtriktad normal så gäller

$$\underbrace{\iint_{\partial K} u \cdot N \, dS}_{\text{Flödet ut ur } K} = \underbrace{\iiint_K \operatorname{div} u \; dxdydz}_{\text{medelvärdet av produktionen/konsumtionen}} .$$



Bevis: I fallet då φ och ψ finns och

$$K = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x_1,x_2) \le x_3 \le \psi(x_1,x_2) \,,\; (x_1,x_2) \in D \}$$

Låt oss först visa att $\iint_{\partial K} (0,0,u_3)\cdot N\,dS = \iiint_K \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\,dx_1dx_2dx_3$

$$HL = \iiint_K \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\,dx_1dx_2dx_3 = \iint_D \left(\int_{\varphi(x_1,x_2)}^{\psi(x_1,x_2)} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\,dx_3 \right) dx_1dx_2$$

$$= \iint_D \Big(u_3(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2)) - u_3(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2)) \Big)\,dx_1dx_2 = ⊛$$

Eftersom $N\cdot dS = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, 1\right) dx_1dx_2$
↑uppåt riktad normal

$$\iint_D u_3(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2))\,dx_1dx_2 = \iint_D (0,0,u_3(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2)))\cdot N\,dS$$
(ovansidan av K).

$$⊛ = \iint_{\partial K} (0,0,u_3)\cdot N\,dS.$$

Notera att $\iint (0,0,u_3)\cdot N\,dS = 0$ på de delar där normalen är parallell med xy-planet.

Nu följer satsen genom samma tänk i x_1 och x_2.

<u>Ex</u>:

<u>Definition</u>: Vektorfält u som uppfyller att $\operatorname{div} u = 0$ i hela definitionsmängden kallas källfria.

Ex: $u(x,y,z) = \left(bxy^2,\ bx^2y,\ (x^2+y^2)z^2\right)$

$K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le b\}$.

Beräkna $\displaystyle\iint_{\partial K} u \cdot N \, dS$.

Lösning: $\displaystyle I = \iint_{\partial K} (u \cdot N)\, dS = \iiint_K \operatorname{div} u \, dx\,dy\,dz$

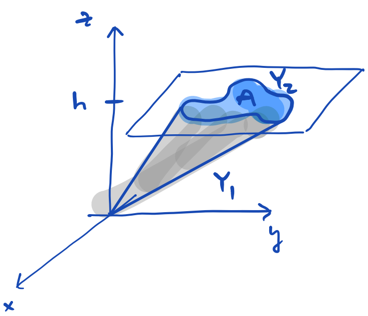
$$= \iiint_K \left(by^2 + bx^2 + 2(x^2+y^2)z\right) dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le a^2} \left(\int_0^b (x^2+y^2)\cdot(b+2z)\, dz \right) dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le a^2} (x^2+y^2)\left(\int_0^b (b+2z)\,dz\right) dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le a^2} (x^2+y^2)\left[bz+z^2\right]_0^b dx\,dy$$

$$= 2b^2 \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3\, dr\, d\theta = 4\pi b^2 \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \underline{\underline{\pi b^2 \cdot a^4}}$$

Ex:



Bestäm volymen av den kon K som har basarea A och höjd h.

Lösning: Låt $u(x) = (x_1, x_2, x_3) = x$

$\operatorname{div} u = 1+1+1 = 3$.

$$\mu(K) = \iiint_K dx\,dy\,dz = \frac{1}{3}\iiint_K (\operatorname{div} u)\, dx\,dy\,dz$$

$$\overset{\text{divergenssatsen}}{\downarrow}$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\partial K} u \cdot N \, dS = \frac{1}{3} \iint_{Y_1} \underbrace{x \cdot N}_{=0} \, dS + \frac{1}{3} \iint_{Y_2} x \cdot (0,0,1) \, dS$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{Y_2} x_3 \, dx_1 \, dx_2 = \frac{h}{3} \iint_{Y_2} dx_1 \, dx_2 = \underline{\underline{\frac{A \cdot h}{3}}}.$$

9. (4 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3y, yz, xz)$ ut genom sfären med centrum i $(1,0,1)$ och radie 1.

Låt $K = \{(x,y,z) : (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1\}$.

divergenssatsen $\qquad\qquad$ $3x^2y$ udda i y.

$$\iint_{\partial K} F \cdot dS \overset{\swarrow}{=} \iiint_K (3x^2y + z + x) \, dxdydz \overset{\swarrow}{=} \iiint_K \underbrace{(x+z)}_{\text{symmetri}} \, dxdydz$$

$$= 2\iiint_K z \, dxdydz = \left\{ \begin{array}{l} x-1 = r\cos\varphi \sin\theta \\ y = r\sin\varphi \sin\theta \\ z-1 = r\cos\theta \end{array} \right\} =$$

$$= 2\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (1 + r\cos\theta) \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = 4\pi \int_0^1 \int_0^{\pi} \Big(r^2 \sin\theta + \underbrace{r^3 \frac{\sin 2\theta}{2}}_{\substack{\text{integreras över} \\ \text{en hel period.}}} \Big) \, d\theta \, dr$$

$$= 4\pi \int_0^1 \Big[-r^2 \cos\theta \Big]_0^{\pi} dr = 4\pi \int_0^1 (r^2 + r^2) \, dr$$

$$= 8\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8\pi}{3}.$$

10. (4 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut ur kroppen $K \subset \mathbb{R}^3$, där

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(5x^3 + 12xy^2 + e^x \sin z,\, y^3,\, 5z^3 + e^x \cos z\right)$$

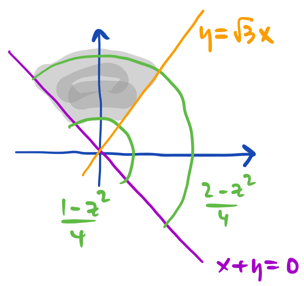
och

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \le 4x^2 + 4y^2 + z^2 \le 2,\, x + y \ge 0,\, \sqrt{3}x - y \le 0,\, z \ge 0\}.$$

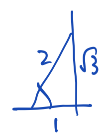
$$I = \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_K \left(15x^2 + 12y^2 + e^x \sin z + 3y^2 + 15z^2 - e^x \sin z\right) dx\,dy\,dz$$

$$= 15 \iiint_K (x^2+y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz = 15 \int_0^{\sqrt{2}} \left(\iint_Y (x^2+y^2+z^2)\, dx\,dy \right) dz .$$



$$\frac{1-z^2}{4} \le x^2+y^2 \le \frac{2-z^2}{4}, \quad x+y \ge 0, \quad \sqrt{3}x - y \le 0$$



$$I = 15\left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sqrt{2-z^2}}{2}} (z^2+r^2)\, r\, dr\, d\theta \right) dz - \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}} (z^2+r^2)\, r\, dr\, d\theta \right) dz \right)$$

$$= 15 \cdot \frac{5\pi}{12} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{z^2 \cdot r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^{\frac{\sqrt{2-z^2}}{2}} dz - \int_0^1 \left[\frac{z^2 \cdot r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^{\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}} dz \right)$$

$$= \frac{5^2 \pi}{4} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \frac{z^2(2-z^2)}{8} + \frac{(2-z^2)^2}{64}\, dz - \int_0^1 \frac{z^2(1-z^2)}{8} + \frac{(1-z^2)^2}{64}\, dz \right)$$

$$= \frac{5^2 \cdot \pi}{4 \cdot 64} \left(\int_0^{\sqrt{2}} (16z^2 - 8z^4 + 4 - 4z^2 + z^4)\, dz - \int_0^1 (8z^2 - 8z^4 + 1 - 2z^2 + z^4)\, dz \right)$$

$$= \frac{5^2 \cdot \pi}{4 \cdot 64} \left(\left[\frac{12z^3}{3} - \frac{7z^5}{5} + 4z \right]_0^{\sqrt{2}} - \left[\frac{6z^3}{3} - \frac{7z^5}{5} + z \right]_0^1 \right)$$

$$= \frac{5^2 \cdot \pi}{4 \cdot 64} \left(8\sqrt{2} - \frac{7 \cdot 4\sqrt{2}}{5} + 4\sqrt{2} - 2 + \frac{7}{5} - 1 \right)$$

$$= \frac{5\pi}{4 \cdot 64} \left(\sqrt{2}(40 - 28 + 20) - 8 \right) = \frac{5\pi(32\sqrt{2} - 8)}{4 \cdot 64} = \frac{5\pi \cdot 8(4\sqrt{2} - 1)}{8 \cdot 8 \cdot 4}$$

$$= \frac{5\pi(2^{5/2} - 1)}{2^5}$$