Låt $r = r(s,t)$ vara parameterframställningen för en yta Y, $(s,t) \in D$.

Vi kallar den sida dit normalvektorn $r'_s \times r'_t$ pekar den positiva sidan.

Ex: $r = R(\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$r = r(\theta, \varphi)$.

$$r'_\theta \times r'_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\varphi \cos\theta & \sin\varphi \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi \sin\theta & \cos\varphi \sin\theta & 0 \end{vmatrix} \cdot R^2$$

$$= R^2 \big(\sin^2\theta \cos\varphi, \sin\varphi \sin^2\theta, \underbrace{\cos^2\varphi \cos\theta \sin\theta + \sin^2\varphi \cos\theta \cdot \sin\theta}_{\cos\theta \sin\theta}\big)$$

$$= R^2 \cdot \sin\theta (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta) = \underbrace{R \cdot \sin\theta}_{>0} \cdot r(\theta, \varphi)$$

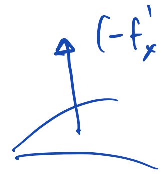
Alltså är utsidan av sfären den positiva sidan i sfäriska koordinater.

Ex: Funktionsyta $z = f(x,y)$.

$r = r(x,y) = (x, y, f(x,y))$

$r'_x = (1, 0, f'_x) \quad r'_y = (0, 1, f'_y)$.

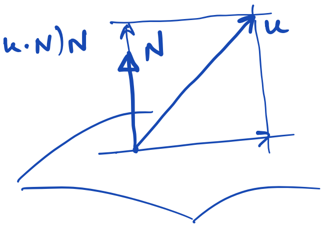
$$r'_x \times r'_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, -f'_y, 1)$$



$(-f'_x, -f'_y, 1)$

pekar uppåt.

Flöde: $(u\cdot N)N$



$u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

N enhetsnormal

$$\Phi := \iint_Y u\cdot N\, dS.$$

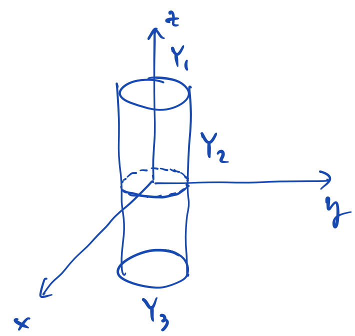
Om Y parametriseras av $r = r(s,t)$.

$$N = \frac{r'_s \times r'_t}{|r'_s \times r'_t|} \qquad dS = |r'_s \times r'_t|\, ds\, dt$$

(areaelementet)

Alltså
$$\Phi = \iint_Y u(r(s,t))\cdot(r'_s \times r'_t)\, ds\, dt$$

Ex: Beräkna flödet av $u = (x,y,z)$ ut ur cylindern $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le a^2,\ -h \le z \le h\}$.



Y_1: $N_1 = (0,0,1)$, $z = h$

$$\Phi_1 = \iint_{Y_1} u\cdot N_1\, dS = \iint_{x^2+y^2\le a^2} h\, dx\,dy = h\cdot\pi a^2$$

$$\Phi_3: \iint_{Y_3} u\cdot N_3\, dS = \iint_{x^2+y^2\le a^2} h\, dx\,dy = h\pi a^2$$

$(N_3 = (0,0,-1),\ z = -h)$

$x^2+y^2 = a^2$, $-h \le z \le h$.
$$\begin{cases} x = a\cdot\cos\theta \\ y = a\cdot\sin\theta \end{cases} \qquad r = r(\theta,z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z)$$

$$\Phi_2 = \iint_{Y_2} u\cdot N_2\, dS = \int_{-h}^{h}\int_{0}^{2\pi} (a\cos\theta, a\sin\theta, z)\cdot(r'_\theta \times r'_z)\, dS.$$

$$r'_\theta = (-a\sin\theta, a\cos\theta, 0) \qquad r'_z = (0,0,1)$$

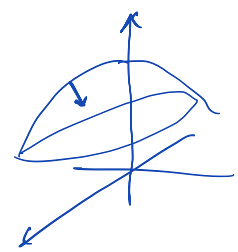
$$r'_\theta \times r'_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0).$$

(riktad utåt).

$$\Phi_2 = \int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)\,d\theta\,dz = a^2 \cdot 2h \cdot 2\pi = 4\pi h a^2$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \underline{\underline{6\pi h a^2}}.$$

Ex: Bestäm flödet av $U = (y^3, z^2, x)$ nedåt genom den del av ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför $z = 2x+1$.



$r = r(x,y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$

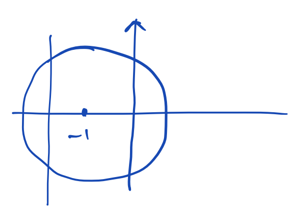
$r'_x \times r'_y = (1, 0, -2x) \times (0, 1, -2y)$

$= (2x, 2y, 1).$

$$\boxed{\begin{aligned} 4 - x^2 - y^2 &= 2x+1 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 &= 4 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}}$$

$$\Phi = -\iint_{(x+1)^2+y^2 \le 4} (y^3, z^2, x) \cdot (2x, 2y, 1)\,dx\,dy$$

$$= -\iint_{(x+1)^2+y^2 \le 4} \left(2xy^3 + 2y(4-x^2-y^2)^2 + x\right) dx\,dy =$$



För givet x är $$\int_{y^2 \le 4-(x+1)^2} (\overbrace{2xy^3 + 2y(4-x^2-y^2)^2}^{\text{udda i } y})\,dx\,dy = 0.$$

(udda så försvinner)

Alltså $\Phi = \iint_{(x+1)^2+y^2\le 4} -x\,dxdy = -\iint_{x^2+y^2\le 4} (x-1)\,dxdy = 4\pi$

Ex: Bestäm flödet av $F(x,y,z)=(x,y,z^2)$ upp genom ytan $r(u,v)=(u\cos v,\ u\cdot\sin v,\ u)$, $0\le u\le 2$, $0\le v\le \pi$.

Lösning: $r'_u = (\cos v, \sin v, 1)$ $\quad r'_v = (-u\cdot\sin v, u\cos v, 0)$

$$r'_u \times r'_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u\cos v, -u\sin v, u)$$

(pekar uppåt eftersom $0\le u\le 2$).

$$I = \iint_Y (F\cdot N)\,dS = \int_0^2\int_0^\pi (u\cos v, u\sin v, u^2)\cdot(-u\cos v, -u\sin v, u)\,dv\,du$$

$$= \int_0^2\int_0^\pi (-u^2\cos^2 v - u^2\sin^2 v + u^3)\,dv\,du = \pi\int_0^2 (u^3-u^2)\,du$$

$$= \pi\left[\frac{u^4}{4}-\frac{u^3}{3}\right]_0^2 = \pi\left(4-\frac{8}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

5. (4 poäng) Temperaturen i en punkt (x, y, z) i rummet ges av funktionen

$$T(x, y, z) = z^2 - xy.$$

Värmeflödet beskrivs av vektorfältet $\mathbf{v} = -k\nabla T$, där $k > 0$ är en konstant. Bestäm takten med vilken värme flödar genom ytan Σ, dvs bestäm värdet av dubbelintegralen

$$\int_\Sigma \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S},$$

där Σ är ytan i $\mathbb{R}^3$ som ges i cylindriska koordinater (r, φ, z) av

$$\Sigma:\ 0\le r\le 1,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad z=\varphi,$$

orienterad så att normalen har positiv z-koordinat.

$$v(x,y,z) = -k(-y,-x,2z) = k(y,x,-2z).$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}$$

$$v(r,\varphi,z) = k(r\sin\varphi, r\cos\varphi, -2z)$$

$$s(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)$$

$$s'_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \qquad s'_\varphi = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 1)$$

$$s'_r \times s'_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 1 \end{vmatrix} = (\sin\varphi, -\cos\varphi, r)$$

(positiv z).

$$\iint_\Sigma v\cdot dS = \int_0^1\int_0^{2\pi} k(r\sin\varphi, r\cos\varphi, -2\varphi)(\sin\varphi, -\cos\varphi, r)\,d\varphi\,dr$$

$$= k\int_0^1\int_0^{2\pi}(r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi - 2\varphi r)\,d\varphi\,dr$$

$$= k\int_0^1 r\,dr \cdot \int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi - 2\varphi)\,d\varphi = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}(-2\varphi)\,d\varphi$$

$$= -k\left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^{2\pi} = -k\,2\pi^2$$