Definition: Vektorfältet $F = (P, Q)$ kallas ett
(eller konservativt fält)
potentialfält i det öppna området Ω om det finns en C^1-funktion U i Ω sådan att

$$F = \text{grad } U.$$

Funktionen U kallas **potential** till F.

Ex: $U(x,y) = 2xy^2 + y$

$$F = (P, Q) = \text{grad } U = (2y^2, 4xy + 1)$$

Alltså är U en potential till F.

Notera att $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4y - 4y = 0$ eftersom

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0 \quad . \quad (\text{om } U \text{ i } C^2).$$

Anm: Notera att en potential till ett fält F inte är entydigt bestämd. Låt U_1 och U_2 vara potentialer till F. Alltså

$$\text{grad } U_1 - \text{grad } U_2 = F - F = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \text{grad } (U_1 - U_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad U_1 - U_2 = c \ (\text{konstant})$$

Ex: Låt $F = (2x e^y, x^2 e^y)$. Bestäm en potential till F.

Söker U så dan att $\operatorname{grad} U = F$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 2x e^y \\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial y} = x^2 e^y \end{cases}$$

Från (1) $U(x,y) = x^2 e^y + C(y)$

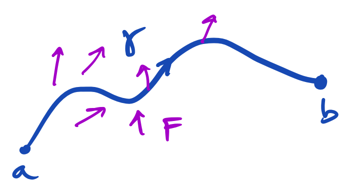
Från (2) $U(x,y) = x^2 e^y + C(x)$

Tillsammans $U(x,y) = x^2 e^y + C$

Det funkar. Det gör det inte alltid.

Sats: Låt $F = (P, Q)$ vara ett vektorfält med potentialen U i det öppna området Ω. För varje kurva γ i Ω gäller då att

$$\int_\gamma F \cdot dr = U(b) - U(a),$$



där a och b är start- och slutpunkt för γ. Speciellt är $\int_\gamma F \cdot dr$ oberoende av vägen.

Bevis: $r = r(t)$, $r(\alpha) = a$, $r(\beta) = b$. $\alpha \le t \le \beta$.

$$\frac{d}{dt}\big(U(r(t))\big) = \operatorname{grad} U(r(t)) \cdot r'(t) = F(r(t)) \cdot r'(t)$$

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\alpha^\beta F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\big(U(r(t))\big)\,dt = \Big[U(r(t))\Big]_\alpha^\beta$$

$$= U(r(\beta)) - U(r(\alpha)) = U(b) - U(a). \quad \blacksquare$$

Ex: Är $E = \dfrac{(x,y)}{x^2+y^2}$ ett potentialfält?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \rightarrow u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C$$

Är $B = \dfrac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ ett potentialfält?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

(1): $\dfrac{\partial U}{\partial x} = -\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \Rightarrow U = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C_1(y)$

(2): $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \rightarrow U = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C_2(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

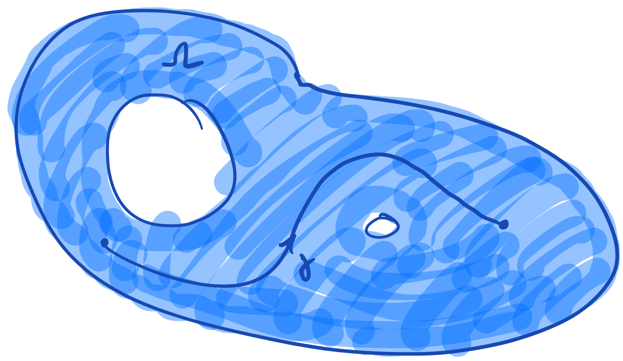
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

(Note: $\arctan\theta + \arctan\frac{1}{\theta} = \frac{\pi}{2}$)

Men $U = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ är inte definierad för linjen $x=0$.

Vi kan ej finna en C^1-funktion som uppfyller $B = \operatorname{grad} U$.
(om så är $\operatorname{grad}(U-\varphi) = 0 \Leftrightarrow U = \varphi + C$ därmed är inte $\varphi \in C^1$).

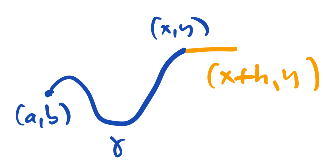
Sats: Låt $F=(P,Q)$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω. Om kurvintegralen $\int_\gamma F\cdot dr$ är oberoende av vägen så har F en potential i Ω.



Bevis: Vi behöver finna ett $U:\Omega\to\mathbb{R}$ sådant att $\operatorname{grad} U = F$.

Definiera $U(x,y) := \int_\gamma P(s,t)\,ds + Q(s,t)\,dt$ där γ är någon kurva från (a,b) till (x,y).

Vi vill visa att $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ och $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$.



$$\frac{1}{h}\left(U(x+h,y) - U(x,y)\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{(a,b)}^{(x,y)} P\,ds + Q\,dt + \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} P\,ds + Q\,dt - \int_{(a,b)}^{(x,y)} P\,ds + Q\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_{(x,y)}^{(x+h,y)} P\,ds + Q\,dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^h P(s,y)\,ds \to P(x,y),$$ då $h\to 0$. Alltså $\frac{\partial U}{\partial x} = P$.

enligt medelvärdessatsen. (P måste vara kontinuerlig)

Analogt kan man visa att $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$. ■

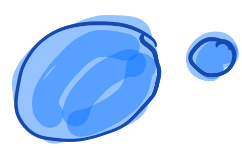
<u>Sats:</u> Antag att fältet $F = (P,Q)$ har en potentialfunktion U av klass C^2 i Ω. Då är

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

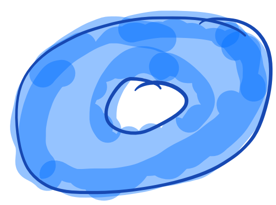
<u>Sats:</u> Om vektorfältet $F = (P,Q)$ uppfyller $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y) \in \Omega$ och om Ω är enkelt sammanhängande öppen del av planet så har F en potential i Ω.

En mängd Ω är <u>enkelt sammanhängande</u> om den är bågvis sammanhängande och varje sluten kurva i Ω avgränsar ett område som är helt inneslutet i Ω.

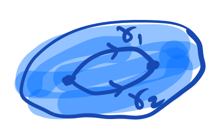
<u>Ex:</u> Ej enkelt sammanhängande: a)



b)



<u>Bevis:</u> Vi är klara om vi kan visa att $\int_\gamma F \cdot dr$ är oberoende av vägen i Ω.



Antag att vi har två kurvor γ_1 och γ_2.

Vi vill visa att $\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_{\gamma_2} F \cdot dr \Rightarrow \int_{\gamma_1 - \gamma_2} F \cdot dr = 0$.

$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$. Vi är klara.