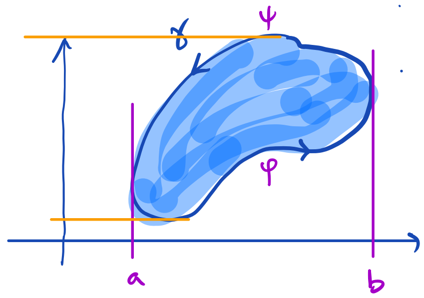
Låt D vara en kompakt delmängd av $\mathbb{R}^2$.



$\gamma = \partial D$ orienterad så att D är vänster om kurvan (positiv orientering)

Låt $F = (P, Q)$ vara ett vektorfält.

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx = -\int_a^b \big(P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\big)\,dx$$

$$= -\int_a^b P(x,\psi(x))\,dx + \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx = \int_\gamma P\,dx + 0 \cdot dy$$

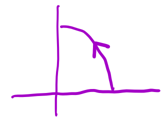
På liknande sätt får vi $\displaystyle\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_\gamma Q\,dy$

<u>Greens formel</u>: Låt P och Q vara två C^1-funktioner definierade i en öppen mängd Ω i planet. Om det kompakta delområdet D av Ω har en rand ∂D som utgörs av en eller flera styckvis C^1-kurvor och som är positivt orienterade så är

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Ex: Beräkna $I = \int_\gamma (x-y^3)\,dx + (y^3+x^3)\,dy$, $\gamma = \partial D$ positivt orienterad

$D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0,\ 0 \leq x^2+y^2 \leq a^2\}$.



Enligt Greens formel är $I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$.

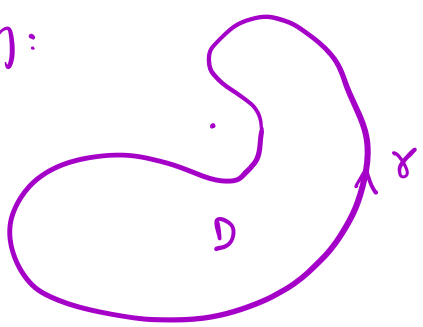
$P(x,y) = x - y^3$, $Q(x,y) = y^3 + x^3$.

$$I = \iint_D (3x^2+3y^2)\,dx\,dy = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\, r\, dr\, d\theta = \frac{3\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{3\pi a^4}{8}$$

Ex: Låt $B = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ vara ett magnetfält kring en lång rak ledare längs z-axeln.

a) Visa att $\int_{\partial D} B \cdot dr = 0$ för varje kompakt område som ej innehåller origo.

Lösning:



$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

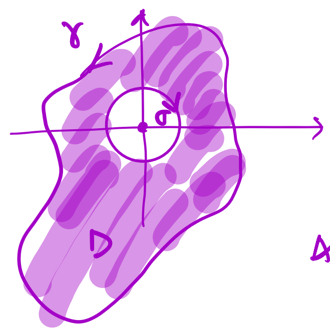
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2x^2+x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Enligt Greens formel är $\int_{\partial D} B\cdot dr = \iint_D 0\,dx\,dy = 0$.

b) Visa att $\int_\gamma B \cdot dr = 2\pi$ för varje kurva γ

som går ett varv runt origo i positiv riktning.

Lösning:



$$\int_\gamma B \cdot dr + \int_\sigma B \cdot dr = \iint_D 0 \, dx dy = 0.$$

Alltså $\int_\gamma B \cdot dr = -\int_\sigma B \cdot dr$

$$-\int_\sigma B \cdot dr = \int_\sigma \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \left\{ \begin{matrix} x = R\cos\theta \\ y = R \cdot \sin\theta \end{matrix} \right\} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2}\Big(-R\sin\theta\,(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$dx = R(-\sin\theta)d\theta \qquad + R\cos\theta\,(R\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = 2\pi \quad \text{(oberoende av } R\text{)}.$$

Area med Greens formel:

Låt D vara ett område i planet.

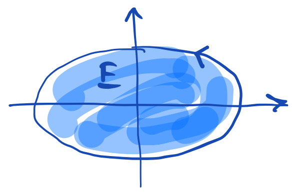
$$\int_{\partial D} -y \, dx = \int_{\partial D} -y \, dx + 0 \cdot dy = \iint_D -\frac{\partial}{\partial y}(-y) \, dx dy = \mu(D).$$

$$\int_{\partial D} x \, dy = \iint_D dx dy = \mu(D).$$

Alltså $\mu(D) = \int_{\partial D} x\,dy = \int_{\partial D} -y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy.$

Ex: Beräkna arean av den elliptiska skivan

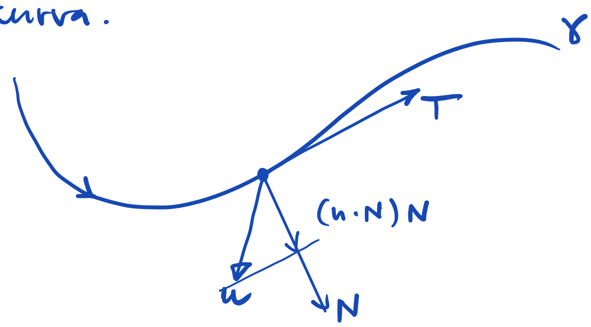
$$E = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}.$$



$$A = \mu(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = \left\{\begin{aligned} x &= a\cdot\cos\theta \\ y &= b\cdot\sin\theta \end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -b\sin\theta\,(-a\sin\theta)\,d\theta + a\cos\theta\, b\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(ab\sin^2\theta + ab\cos^2\theta\right)d\theta = \frac{2\pi ab}{2} = \underline{\pi ab}.$$

Flöde: Låt $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ett vektorfält och γ en kurva.



$\int_\gamma u\cdot N\,ds$ betecknar

flödet av u från vänster till höger genom γ.

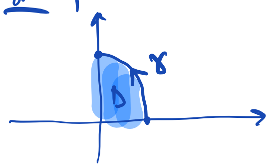
$$\int_\gamma u\cdot N\,ds = \int_\gamma -u_2\,dx + u_1\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)dx\,dy$$

om $\gamma = \partial D$

betecknar flödet ut ur området D.

Ex: (övn 9.14) En partikel, som påverkas av kraften (y^3, x^3) rör sig moturs längs ellipsen $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ från $(0,2)$ till $(1,0)$. Beräkna det arbete som kraften uträttar.

Lösning:



$$\int_\gamma (y^3, x^3)\cdot dr \qquad \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} dx = -\sin\theta\, d\theta \\ dy = 2\cos\theta\, d\theta \end{matrix}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^3\theta\,(-\sin\theta)\,d\theta + \cos^3\theta \cdot 2\cos\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-4\sin^4\theta + \cos^4\theta)\, d\theta .$$

Hm.....

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (3x^2 - 3y^2)\, dx\,dy = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta \end{cases}$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \left(r^2\cos^2\theta - 4r^2\sin^2\theta\right) \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{matrix} \right| dr\, d\theta =$$

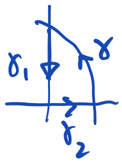
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2(\cos^2\theta - 4\sin^2\theta) \left| \begin{matrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{matrix} \right| dr\,d\theta = 6\int_0^1 r^3\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - 4\sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - 4(1-\cos^2\theta))\, d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\cos^2\theta - 4)\, d\theta$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 \longrightarrow \cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}.$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{5 + 5\cos 2\theta}{2} - 4\right) d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\cos 2\theta - 3)\, d\theta = \frac{3}{4}\left[\frac{5\sin 2\theta}{2} - 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{4}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{9\pi}{8}.$$



$\gamma_1: \quad x=0 \quad , \quad y = 2-2t \qquad 0 \le t \le 1.$

$$\int_{\gamma_1} (y^3, x^3)\, dr = \int_0^1 ((2-2t)^3, 0)(0dt, -2tdt) = 0 .$$

$$\int_{\gamma_2} (y^3, x^3)\, dr = \int_0^1 (0, t^3)(dt, 0\, dt) = 0.$$

$$\left(\int_{\gamma} + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}\right)(y^3, x^3)\, dr = \int_{\gamma}(y^3, x^3)\, dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= -\frac{9\pi}{8}.$$