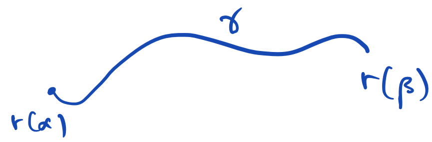
21 Kurvintegraler

Låt γ vara en orienterad kurva i $\mathbb{R}^2$ med parameterframställningen $r = r(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.



Repetition:

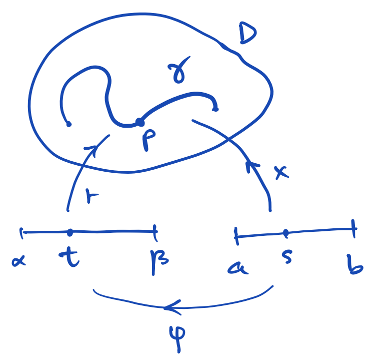
Längden av γ $\quad \int_\gamma ds = \int_\alpha^\beta |r'(t)|\, dt$.

ds bågelementet. $\quad \left(s = \int_\alpha^t |r'(u)|\, du \quad \text{båglängden} \right)$

oberoende av parameterframställning.

Vektorfält: Låt $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

Låt $\gamma \subset D$ vara en kurva med de bijektiva parameterframställningarna $r : [\alpha, \beta] \to \gamma$ och $x : [a, b] \longrightarrow \gamma$.



Sats: $\displaystyle \int_\alpha^\beta \underbrace{F(r(t)) \cdot r'(t)}_{\text{skalärprodukt}}\, dt = \int_a^b \underbrace{F(x(s)) \cdot x'(s)}_{\text{skalärprodukt.}}\, ds$.

Bevis: Givet $p \in \gamma$ så finns ett unikt $t \in [\alpha, \beta]$ och $s \in [a, b]$ sådana att $r(t) = p = x(s)$. Låt $\varphi(s) = t$.

Från kedjeregeln får vi

$$x'(s) = \frac{d}{ds}\big(x(s)\big) = \frac{d}{ds}\Big(r(\varphi(s))\Big) = r'(\varphi(s))\,\varphi'(s)$$

Därmed är

$$\int_a^b F(x(s))\cdot x'(s)\,ds = \int_a^b F(x(s))\cdot r'(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds$$

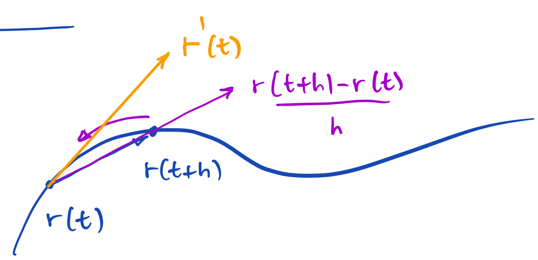
$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(s) \\ dt = \varphi'(s)\,ds \end{array} \right\} = \int_\alpha^\beta F(r(t))\cdot r'(t)\,dt. \qquad \blacksquare$$

Eftersom $\int_\alpha^\beta F(r(t))\cdot r'(t)\,dt$ är oberoende av parameter-framställningen inför vi notationen

$$\int_\gamma F\cdot dr$$ för kurvintegralen av F över γ.

Alternativt om $F = (P, Q)$ där $P: D \to \mathbb{R}$, $Q: D \to \mathbb{R}$

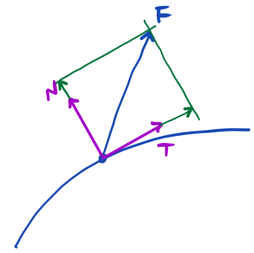
$$\int_\gamma F\cdot dr = \int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$



Endast den del av vektorfältet som är i kurvans tangent som ger bidrag.

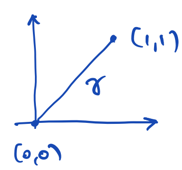
$$\int_\alpha^\beta F(r(t))\cdot r'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F(r(t))\cdot \underbrace{\frac{r'(t)}{|r'(t)|}}_{=:\,T(t)}|r'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta F(r(t))\cdot T(t)\,ds.$$

$$F = (F\cdot N)N + (F\cdot T)T$$



Ex: Låt $F(x,y) = (y^2, 2xy)$. Bestäm kurvintegralen $\int_\gamma F\cdot dr$, där γ är

a) linjen från $(0,0)$ till $(1,1)$.

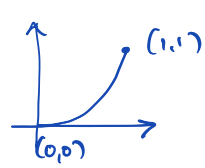


γ: $r = r(t) = (t,t)$, $0 \le t \le 1$.

$F(x,y) = (t^2, 2t^2)$, $dr = r'(t)\,dt = (1,1)\,dt$

$$\int_\gamma F\cdot dr = \int_0^1 (t^2, 2t^2)\cdot(1,1)\,dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^2)\,dt = \int_0^1 3t^2\,dt = 1$$

b) Längs $y = x^2$ från $(0,0)$ till $(1,1)$.



$r = r(t) = (t, t^2)$ $\qquad r'(t) = (1, 2t)$

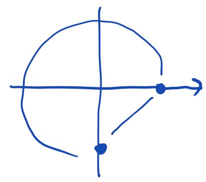
$F(x,y) = (t^4, 2t^3)$

$$\int_\gamma F\cdot dr = \int_0^1 (t^4, 2t^3)\cdot(1,2t)\,dt = \int_0^1 (t^4 + 4t^4)\,dt = \left[t^5\right]_0^1 = 1.$$

Ex: $F(x,y) = (y, -x)$ från $(1,0)$ till $(0,-1)$.

a) längs en rät linje

b) enhetscirkeln moturs.



a) $r = r(t) = (1-t, -t)$ $\quad r'(t) = (-1,-1)$

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_0^1 (-t, t-1) \cdot (-1,-1)\, dt = \int_0^1 (t - t + 1)\, dt = \underline{\underline{1}}$$

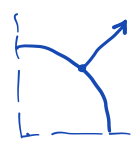
b) $r = r(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ $\quad 0 \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$.

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin\theta, -\cos\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \underline{\underline{-\frac{3\pi}{2}}}.$$

Ex: $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$, $\quad (x,y) \neq (0,0)$

Beräkna $\int_{\gamma_R} F \cdot dr$, där γ_R är cirkeln med radien R moturs.

$r = (R\cos\theta, R\sin\theta)$, $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$.



$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} (R\cos\theta, R\sin\theta)(-R\sin\theta, R\cos\theta)\, d\theta = 0$$

Ex: En partikel med massan m rör sig i ett kraftfält F längs γ . Enligt Newtons andra lag är

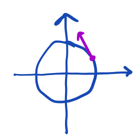
$F = m \cdot a = m\, r''(t)$. Arbetet ges av $\int_\gamma F \cdot dr$.

$$\int_\gamma F \cdot dr = m \int_\alpha^\beta r''(t) \cdot r'(t)\, dt = m \int_\alpha^\beta \left(r_1''(t) r_1'(t) + r_2''(t) r_2'(t) \right) dt$$

$$= m \left[\frac{r_1'(t)^2}{2} + \frac{r_2'(t)^2}{2} \right]_\alpha^\beta = \frac{m}{2} \left[|r'(t)|^2 \right]_\alpha^\beta = \frac{m \cdot v(\beta)^2}{2} - \frac{m\, v(\alpha)^2}{2}.$$

vilket är skillnaden i kinetisk energi.

Ex: $B(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, $(x,y) \neq (0,0)$



Beräkna $\int_{\gamma_R} B \cdot dr$, R-cirkeln moturs.

$r(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$ $\qquad r'(\theta) = (-R\sin\theta, R\cos\theta)$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{R\sin\theta}{R^2}, \frac{R\cos\theta}{R^2} \right) \cdot (-R\sin\theta, R\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = 1.$$