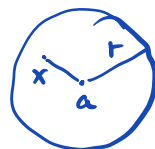


Mängder och funktioner.

Öppet klot i $\mathbb{R}^n$: $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$

beskriver de punkter som finns i det klot som är centrerat i $a \in \mathbb{R}^n$ med radien $r \in \mathbb{R}_+$.



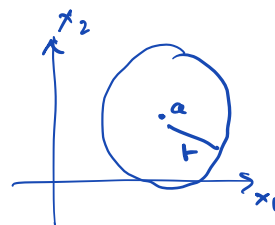
$d=1$: $|x - a| < r \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2} < r$

$$-r < x - a < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$$



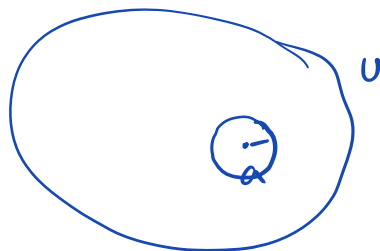
$d=2$: $|x - a| < r \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r$

$$\Leftrightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$$



$d=n$: $|x - a| < r \Leftrightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2$.

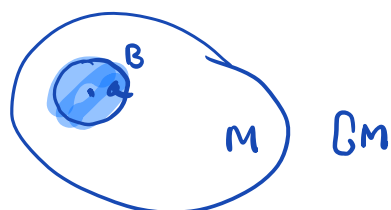
Omgivning: En mängd U är en omgivning till $a \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum i a .



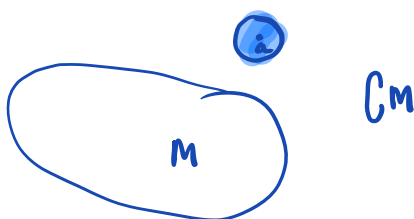
Definition: Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. En punkt $a \in \mathbb{R}^n$ kallas

- inre punkt till M om det finns ett öppet klot B med centrum i a sådant att $B \subset M$.

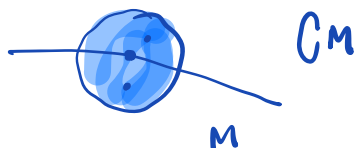
- ytre punkt till M om det finns ett öppet klot B med centrum i a sådant att $B \subset \complement M$.



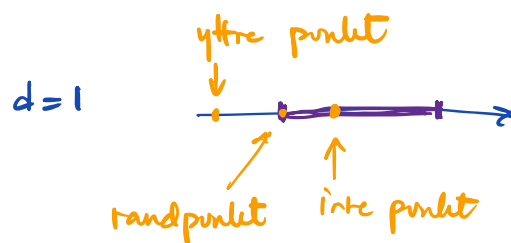
(komplementet till M)



- randpunkt till M om det för varje öppet klot med centrum i a innehåller punkter från M och $\complement M$.



$\partial M := \{\text{randpunkter till } M\}$ kallas randen till M .



Definition: En mängd M i $\mathbb{R}^n$ kallas öppen om alla randpunkter till M ligger i $\complement M$.

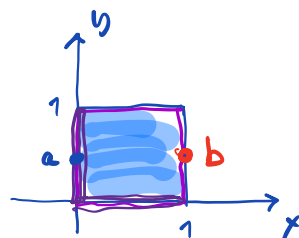
$$(\partial M \subset \complement M).$$

Definition: En mängd M i $\mathbb{R}^n$ kallas sluten om alla randpunkter till M tillhör M .
 $(\partial M \subset M)$

Ex: $M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \}.$

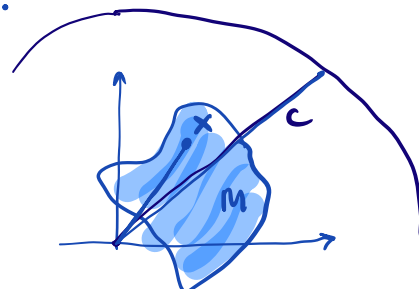
M är varken öppen eller sluten ty

$a = (0, \frac{1}{2})$ är en randpunkt till M och en punkt i M .

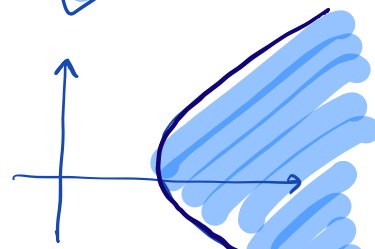


$b = (1, \frac{1}{2})$ är en randpunkt till M och en punkt i $\complement M$.

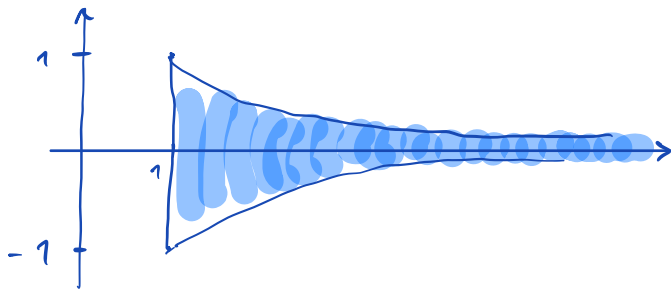
Definition: En mängd M i $\mathbb{R}^n$ kallas begränsad om det finns ett tal $C \in \mathbb{R}$ sådant att $|x| \leq C$ för alla $x \in M$.
 Annars kallas mängden obegränsad.



Definition: En mängd M i $\mathbb{R}^n$ kallas kompakt om den är sluten och begränsad.



Ex: Studera $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, |y| < \frac{1}{x}\}$

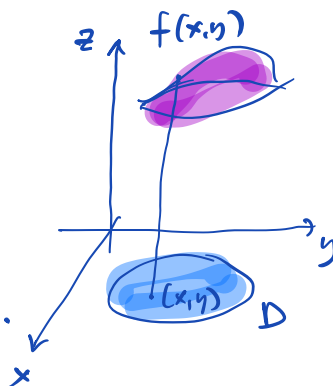


M är obegränsad.
M är öppen
M är inte kompakt.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$.

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

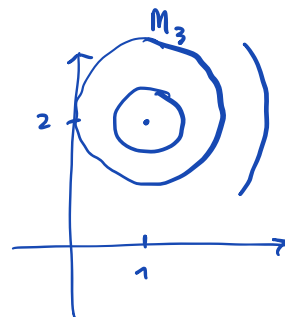
Grafen $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$.



Nivåkurvor: (höjdnivåer på en karta)

Ex: $f(x, y) = 1 + (x-1)^2 + (y-2)^2$

$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 3\}$$



Ex: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ beskriver temperaturen i punkten $x \in \mathbb{R}^3$. (svår att visualisera).

Vektorsvärda funktioner: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p > 1$.

$$\underset{y}{\parallel} \quad (y_1, y_2, \dots, y_p)$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \quad y_k = f_k(x)$$

$$f_k(x) = f_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Ex: Magnetfält i ett rum.

$$B(x, y, z) = (B_1(x, y, z), B_2(x, y, z), B_3(x, y, z)).$$

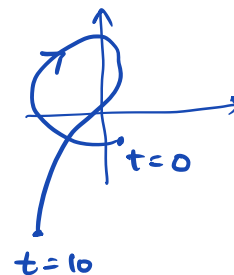
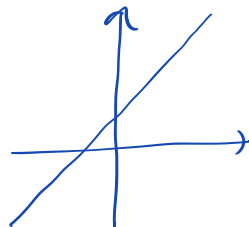
Kurvor: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p > 1$.

$$t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t))$$

$$t \in [0, 10].$$

Ex: Linjer i Linjär algebra.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

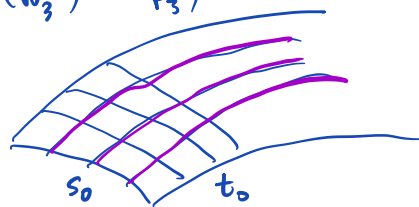


Finns ej entydig parameterframställning.

Ytor i $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$



Linjerna får vi om vi fixerar $s = s_0$ och varierar t .

Sfären:

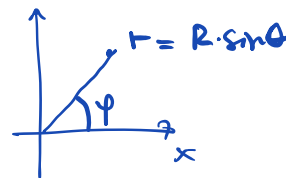
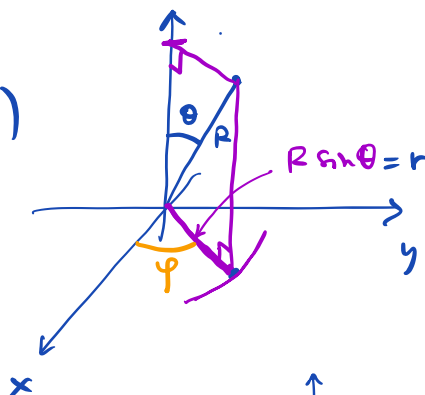
$$(\varphi, \theta) \mapsto (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$$

$$z = R \cdot \cos \theta$$

$$x = r \cdot \cos \varphi = R \cos \varphi \cdot \sin \theta$$

$$y = r \cdot \sin \varphi = R \sin \varphi \cdot \sin \theta$$

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$



Variabelbyten: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (samma n).

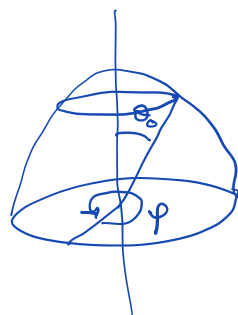
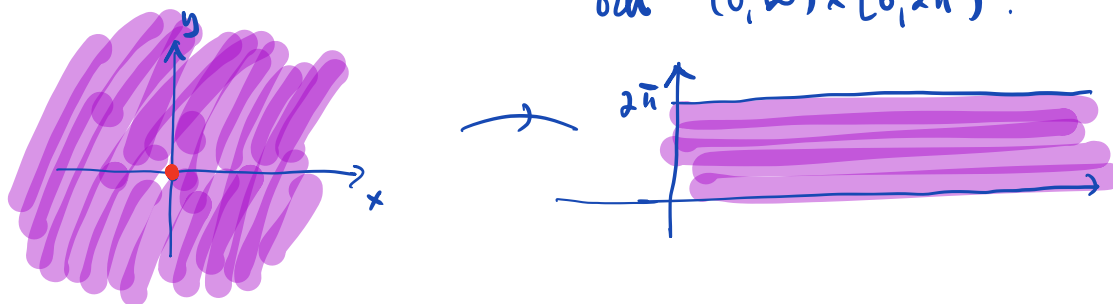
Polärt koordinatbyte

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$



definieer en bijebeten mellan $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$
 och $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$.



$\theta = \theta_0$
 varierar φ