

Tills m: begränsade funktioner och begränsade områden.

Obegränsade områden:

Ex: Låt $f(x,y) = xy(2-xy)e^{-xy}$.

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x,y) dx \right) dy = \int_0^1 \left[xy^2 e^{-xy} \right]_0^\infty dy = \int_0^1 \lim_{R \rightarrow \infty} (R^2 y e^{-Ry} - 0) dy$$

$\uparrow$
Skriv

$$= \int_0^1 0 dy = \underline{\underline{0}}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx &= \int_0^\infty \left[xy^2 e^{-xy} \right]_0^1 dx = \int_0^\infty x e^{-x} dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left([-x e^{-x}]_0^R + \int_0^R e^{-x} dx \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-R e^{-R} + 0 - [e^{-x}]_0^R \right) \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} (e^{-R} - e^0) = \underline{\underline{1}} \quad \text{Huru.} \end{aligned}$$

Positiv integrand:

Låt Ω vara en öppen mängd i $\mathbb{R}^2$ och låt f vara en kontinuerlig funktion i Ω med $f(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in \Omega$.

Notera att Ω kan vara obegränsad och f vara obegränsad.

Ex: $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$, $\Omega = \{(x,y) : x > 0, 0 \leq y \leq 1\}$.

Betrakta alla integraler av typen

$$\iint_D f(x,y) dx dy, \text{ där } D \text{ är en kompakt mängd} \\ \text{delmängd av } \Omega.$$

Definition: Vi säger att $I = \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$ är **konvergent** om

$$M = \left\{ \iint_D f(x,y) dx dy; D \subset \Omega \text{ är kompakt} \right\} \\ \text{är uppat begränsad, annars } \text{divergent} \\ I = \sup M.$$

Ex: Är integralen $\iint_{(0,\infty) \times (0,1)} \frac{1}{1+x^2} dx dy$ konvergent?

Studera följden av mängder $D_n = (0,n) \times (0,1)$.

För varje kompakt mängd $D \subset (0,\infty) \times (0,1)$ finns $n \in \mathbb{N}$ sådana att $D \subset D_n$.

Antän vi checker det med att studera

$$M = \left\{ \iint_{D_n} f(x,y) dx dy : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

$$\iint_{D_n} \frac{1}{1+x^2} dx dy = \int_0^n \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x \right]_0^n = \arctan n$$

Antgår är $M = \{ \arctan n : n = 1, 2, \dots \}$

$$\text{och } \sup M = \frac{\pi}{2}.$$

Sats: $\pm \mathbb{R}^2$ gäller att

$$1) \iint_{|x|>1} \frac{1}{|x|^a} dx \text{ är konvergent} \Leftrightarrow a > 2$$

$$2) \iint_{|x|<1} \frac{1}{|x|^a} dx \text{ är konvergent} \Leftrightarrow a < 2.$$

Beris:

$$2) \iint_{|x|<1} \frac{1}{|x|^a} dx = \begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \\ dx = r dr d\theta \end{cases} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r^a} \cdot r dr d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{a-1}} dr \text{ konvergent} \Leftrightarrow a-1 < 1 \Leftrightarrow a < 2.$$

$$1) \iint_{|x|>1} \frac{1}{|x|^a} dx = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \frac{1}{r^{a-1}} dr d\theta \text{ konvergent}$$

$$\Leftrightarrow a-1 > 1 \Leftrightarrow a > 2.$$

Sats: Antag att $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Omega$

och att

$\iint_{\Omega} g(x,y) dx dy$ är konvergent. Då är

$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$ konvergent.

Ex: Undersök om $\iint_{\Omega} \frac{1}{\sin(x^2+y^2)} dx dy$, $\Omega = \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 < 1\}$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sin(x^2+y^2)} \geq \frac{1}{x^2+y^2} = h(x,y) \geq 0.$$

Eftersom $\iint_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$ är divergent måste

$\iint_{\Omega} \frac{1}{\sin(x^2+y^2)} dx dy$ vara divergent.

Integrand med växlande tecken.

Låt $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$f^+(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & \text{då } f(x,y) \geq 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$$f^-(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{då } f(x,y) \geq 0 \\ -f(x,y), & \text{annars} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Alltså gäller } f(x,y) &= f^+(x,y) - f^-(x,y) \\ |f(x,y)| &= f^+(x,y) + f^-(x,y) \end{aligned}$$

Definition: Man säger att $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$ är konvergent om $\iint_{\Omega} f^+(x,y) dx dy$ och $\iint_{\Omega} f^-(x,y) dx dy$ är konvergenta.

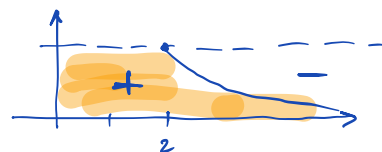
och

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \iint_{\Omega} f^+(x,y) dx dy - \iint_{\Omega} f^-(x,y) dx dy.$$

Ex: Avgör om $\iint_{\Omega} xy(2-xy)e^{-xy} dx dy$ är konvergent
där $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < 1\}$.

Lösning:

$$f(x,y) \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad xy \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq \frac{2}{x}.$$



$$\iint_{\Omega} f^+(x,y) dx dy \leq \int_2^{\infty} \left(\int_0^{\frac{2}{x}} xy(2-xy)e^{-xy} dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x \left[y^2 e^{-xy} \right]_0^{\frac{2}{x}} dx = \int_0^{\infty} x \left(\frac{4}{x^2} e^{-2} \right) dx = 4e^{-2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \quad \text{divergent}.$$

↑
Svar

Attän itererad integration kan ej nyttas innan
man vet att integralen är konvergent.