

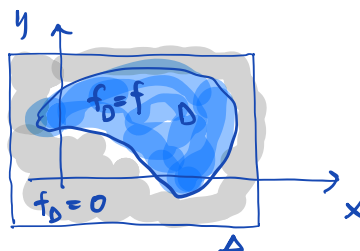
1b Integration över begränsade områden

Definition: Låt f vara en begränsad reellvärd funktion på en begränsad mängd D och inför

$$f_D(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & , (x,y) \in D \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$$

Funktionen f är integrerbar på D om f_D är integrerbar på någon rektangel Δ sådan att $D \subset \Delta$. Vi sätter att

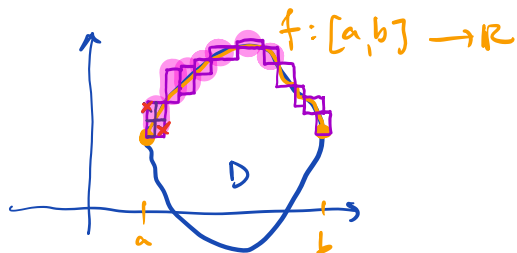
$$\iint_D f(x,y) dx dy := \iint_{\Delta} f_D(x,y) dx dy.$$



Nollmängder: En mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ kallas en nollmängd om vi för varje $\varepsilon > 0$ kan täcka Ω med rektanglar Δ_i vars sammanlagda area är högst ε .

$$\Omega \subset \bigcup_i \Delta_i \quad \sum_i \mu(\Delta_i) < \varepsilon.$$

Lemma: Grafen av en kontinuerlig funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är en volymängd.



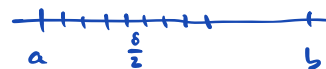
Bevis: f är kontinuerlig på $[a, b]$ ger att f är likformigt kontinuerlig på $[a, b]$.

Antag för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{givet att}$$

$$|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta \quad \text{och} \quad \exists \text{ heltal } n \text{ sådant}$$

$$\text{att} \quad n \cdot \frac{\delta}{2} = (b-a).$$



Dela in $[a, b]$ i delintervall med längden $\frac{\delta}{2}$ eftersom funktionsvärdet högst kan skilja sig med $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ kan vi täcka grafen i varje delintervall

med en rektangel med höjden $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Den sammanlagda arean $n \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Definition: En mängd $D \subset \mathbb{R}^2$ kallas **kvadrerbär** om ∂D (randen av D) är en nollmängd.

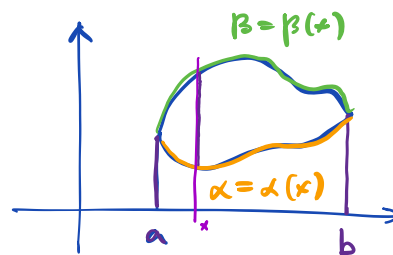
Lemma: Antag att f är likförmigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbär mängd D .
Då är f integrerbär över D .

Definition: Låt D vara kvadrerbär, $D \subset \mathbb{R}^2$
då definieras arean av D som

$$\mu(D) := \iint_D 1 \cdot dx dy = \iint_D dx dy.$$

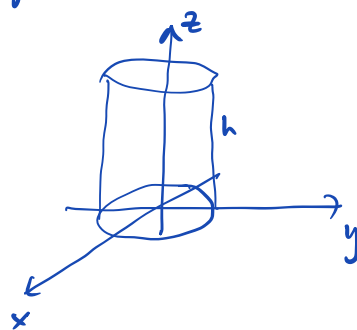
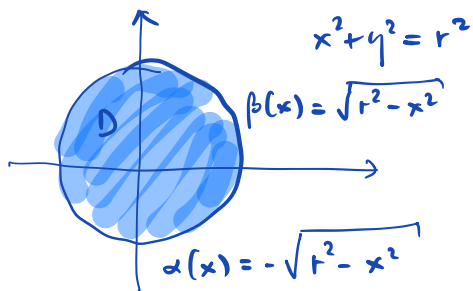
Sats: Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x),$
 α och β är kontinuerliga funktioner $\}$.

och låt f vara kontinuerlig
på D . Då gäller att
 f är integrerbär på D och



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Ex: Visa att volymen av en cylinder är $\pi \cdot r^2 \cdot h$
m.h.a. integration.



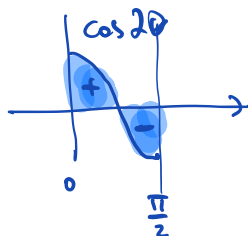
$$V = \iint_D h \, dx \, dy = h \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right) dx = 4h \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right) dx$$

egenskaper för jämna funktion.

$$\begin{aligned} &= 4h \int_0^r [y]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dx = 4h \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} \, dx = \begin{cases} x = r \sin \theta \\ dx = r \cos \theta \, d\theta \end{cases} \\ &= 4h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta} \, r \cos \theta \, d\theta = 4r^2 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}_{=\cos \theta} \cdot \cos \theta \, d\theta \\ &= 4r^2 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = 4r^2 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta \\ &= 4r^2 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2} + \frac{4r^2 h}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \\ &= 2r^2 h \left(\frac{\pi}{2} \right) + 0 \quad \text{ty} \quad \begin{array}{c} \cos 2\theta \\ \text{+} \\ \text{-} \end{array} \\ &= \pi r^2 h. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u \\ &= 2\cos^2 u - 1 \end{aligned}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$



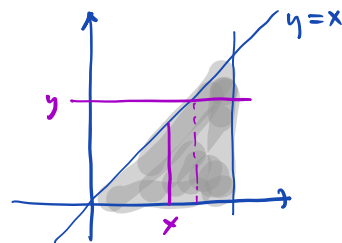
VSV.

Ex: Beräkna

$$I = \iint_Q \frac{1}{x-y+1} dx dy$$

$$Q = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{1}{x-y+1} dx \right) dy$$



$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{x-y+1} dy \right) dx = \int_0^1 \left[-\ln|x-y+1| \right]_0^x dx$$

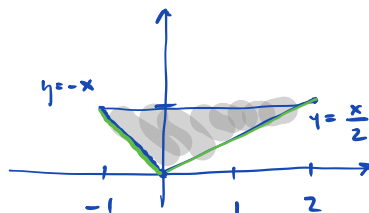
$$= \int_0^1 \left(-\ln 1 + \ln(1+x) \right) dx = \int_0^1 \ln(1+x) dx = \int_0^1 1 \cdot \ln(1+x) dx$$

$$= \left[(1+x) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} dx$$

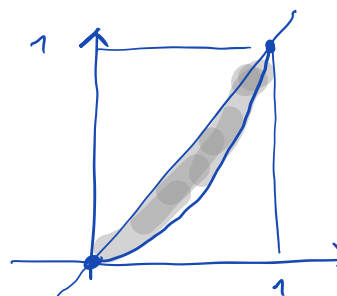
$$= 2 \ln 2 - \int_0^1 1 \cdot dx = 2 \ln 2 - 1.$$

Ex: Beräkna $I = \iint_Q \frac{dx dy}{1+(x-2y)^2}$, Q är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$ och $(-1,1)$.

$$I = \int_0^1 \int_{-y}^{2y} \dots$$



Ex: Beräkna $I = \iint_Q \sin x^2 dx dy$ om Q är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^3$.



$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^x \sin x^2 dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \sin x^2 \left(\int_{x^3}^x dy \right) dx = \int_0^1 \sin x^2 (x - x^3) dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 x \sin x^2 dx}_{=I_1} - \underbrace{\int_0^1 x^3 \sin x^2 dx}_{=I_2} = I_1 - I_2.$$

$$I_1 = \left[-\frac{\cos(x^2)}{2} \right]_0^1 = -\frac{\cos 1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \int_0^1 x \sin x^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = \int_0^1 \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} [-\cos t]_0^1 = -\frac{\cos 1 + 1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^1 x^3 \sin x^2 dx = \int_0^1 x^2 \cdot x \sin x^2 dx$$

$$= \left[x^2 \left(-\frac{\cos(x^2)}{2} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 2x \left(-\frac{\cos(x^2)}{2} \right) dx$$

$$= -\frac{\cos 1}{2} + \int_0^1 x \cos(x^2) dx = -\frac{\cos 1}{2} + \left[\frac{\sin(x^2)}{2} \right]_0^1$$

$$= -\frac{\cos 1}{2} + \frac{\sin 1}{2}$$

2

←

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos 1}{2} - \left(-\frac{\cos 1}{2} + \frac{\sin 1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{\sin 1}{2}}}.$$