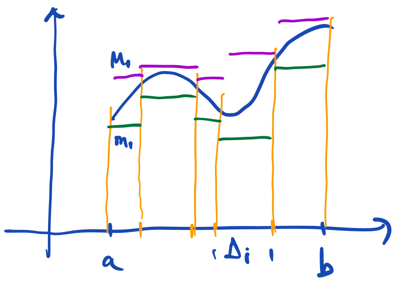
15 Integraler över rektanglar



$$\sum_i m_i \Delta_i \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_i M_i \Delta_i$$

$$L = \left\{ \sum m_i \Delta_i : \ m_i \leq f(x) \text{ på } \Delta_i \right\}$$

$$U = \left\{ \sum M_i \Delta_i : \ M_i \geq f(x) \text{ på } \Delta_i \right\}$$

f integrerbar om $\sup L = \inf U = \text{tal}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup L$$

Vilka problem finns i flera variabler?

- Generella områden.
- Komplicerad rand.

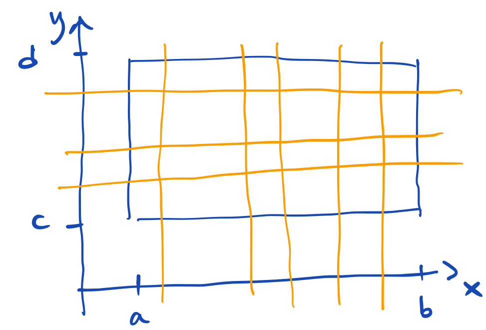
Integration över rektanglar: $(d=2)$

En enkel funktion Φ av två variabler menas en funktion definierad på en axel-parallell rektangel

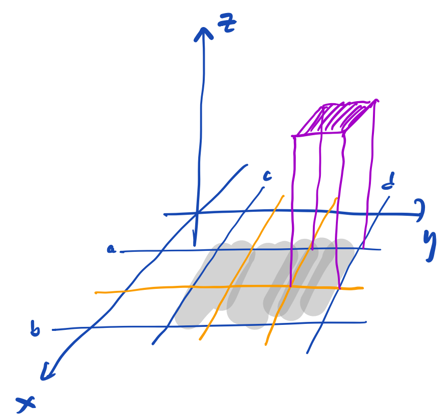
$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \ , \ c \leq y \leq d \right\} = \bigcup \Delta_{i,j} \, ,$$

där $\Delta_{i,j} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i \ , \ y_{j-1} \leq y \leq y_j \right\}$.

där (x_i) och (y_j) är indelningar av intervallen $[a,b]$ och $[c,d]$.



Φ är konstant $c_{i,j}$ på varje $\Delta_{i,j}$.



<u>Definition</u>: Låt Φ vara en enkel funktion (trappfunktion) på Δ då definieras

$$\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j} c_{i,j}\cdot \mu(\Delta_{i,j}),$$

där $\Phi(x,y) = c_{i,j}$ då $(x,y)\in \Delta_{i,j}$ och $\mu(\Delta_{i,j})$ är arean av $\Delta_{i,j}$.

<u>Räkneregler</u>:

- $\iint_\Delta \alpha\,\Phi(x,y)\,dxdy = \alpha\cdot \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy \quad , \alpha\in\mathbb{R}$.
- $\iint_\Delta [\Phi(x,y)+\Psi(x,y)]\,dxdy = \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy + \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dxdy$

(vi kan alltid förfina indelningarna)

• Om $\Phi \le \Psi$ så $\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy \le \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy$.

<u>Sats:</u> $\left| \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy \right| \le \iint_\Delta |\Phi(x,y)|\,dx\,dy$.

<u>Bevis:</u> $-\Phi(x,y) \le |\Phi(x,y)|$ och $\Phi(x,y) \le |\Phi(x,y)|$.

$$\iint_\Delta (-\Phi(x,y))\,dx\,dy \le \iint_\Delta |\Phi(x,y)|\,dx\,dy$$

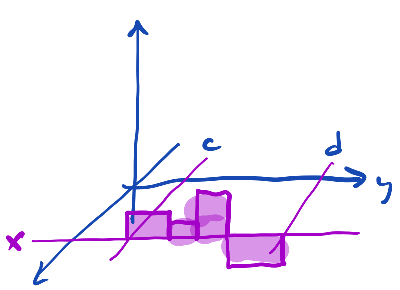
$$-\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy \le \iint_\Delta |\Phi(x,y)|\,dx\,dy$$

Vi har även $\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy \le \iint_\Delta |\Phi(x,y)|\,dx\,dy$

Alltså $\left| \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy \right| \le \iint_\Delta |\Phi(x,y)|\,dx\,dy$. ∎

<u>En variabel i taget:</u>

Fixera x och studera $\varphi(y) = \Phi(x,y)$.



$$A_x = \int_c^d \varphi(y)\,dy = \int_c^d \Phi(x,y)\,dy$$

$$I = \int_a^b A_x\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x,y)\,dy \right) dx$$

Riemannintegralen:

Definition: Låt $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, rektangel

Bilda $L = \left\{ \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy : \Phi \leq f,\ \Phi \text{ är enkel funktion} \right\}$

$U = \left\{ \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy : \Psi \geq f,\ \Psi \text{ är enkel funktion} \right\}$

Om $\inf U = \sup L$ så är f integrerbar på Δ och

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \sup L$$

48
39
2
12.

Räknereglerna kan utvidgas till integrerbara funktioner

Sats: Om f är en integrerbar funktion över rektangeln $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ och om högerleden är definierade så gäller

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Bevis: Låt Ψ vara en enkel funktion på Δ med $f(x,y) \leq \Psi(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Delta$.

Fixera x,

$$\int_c^d f(x,y)\,dy \le \int_c^d \Psi(x,y)\,dy.$$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \le \int_a^b \left(\int_c^d \Psi(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy$$

På samma sätt $\quad \displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \ge \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy$

där $f \ge \Phi$.

$$\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy \le \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \le \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \sup L = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx .$$

$\blacksquare$

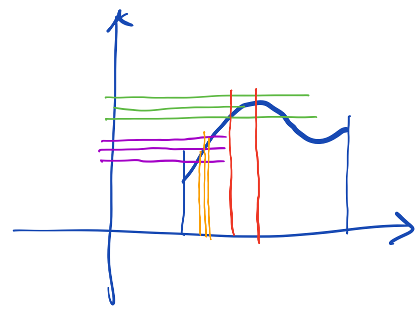
<u>Definition:</u> Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi säger att f är likformigt kontinuerlig om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att

$(x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n)$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{då} \quad |x_1 - x_2| < \delta. \quad \forall x_1, x_2 \in D.$$

$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in (0,1]$

$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad x \in (0,1].$



ej likformigt kontinuerliga funktion.

<u>Sats:</u> Om f är kontinuerlig på $\Delta = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$

så är f integrerbar över Δ.

<u>Bevis:</u> Eftersom Δ är kompakt är f likformigt kontinuerlig.

Låt $\varepsilon > 0$.

Det finns ett $\delta > 0$ sådant att

$|f(x,y) - f(x_1, y_1)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)}$ ← arean givet att $|(x,y) - (x_1,y_1)| < \delta$.

Dela in Δ i små rektanglar Δ_k sådana att diagonalen i Δ_k är mindre än δ.

Låt $M_k = \max\limits_{(x,y)\in\Delta_k} f(x,y) \qquad m_k = \min\limits_{(x,y)\in\Delta_k} f(x,y)$

Alltså är $\quad M_k - m_k < \dfrac{\varepsilon}{\mu(\Delta)}$.

$\Psi(x,y) := M_k$ på Δ_k och $\Phi(x,y) = m_k$ på Δ_k.

$$\Rightarrow \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dx\,dy - \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dx\,dy = \sum_k M_k \mu(\Delta_k) - \sum_k m_k \mu(\Delta_k)$$

$$= \sum_k (M_k - m_k)\mu(\Delta_k) < \sum_k \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \mu(\Delta_k) = \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \sum_k \mu(\Delta_k)$$

$$= \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \cdot \mu(\Delta) = \varepsilon$$

Alltså är f integrerbar. $\blacksquare$

<u>Sats:</u> Om f är kontinuerlig över Δ (rektangel) så gäller att

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy .$$

<u>Bevisskiss</u>:

Givet x, $\quad A(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$.

Visa att A är en kontinuerlig funktion.

⋮

Ex: Beräkna

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x y^2 \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x y^2 \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 y^2 \left(\int_0^1 x \, dx \right) dy = \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 dy = \int_0^1 y^2 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$