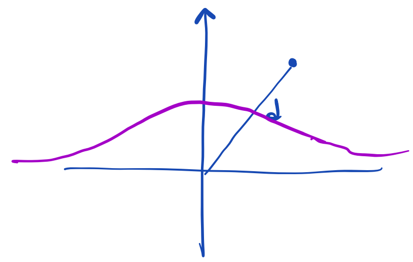
14 Optimering med bivillkor

Ex: Bestäm minsta avståndet från funktionen $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ till origo.

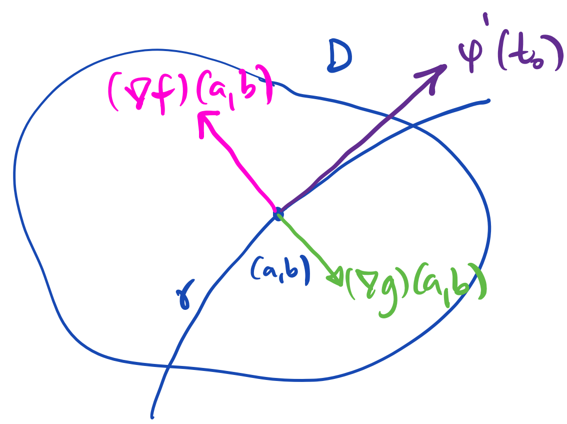


$$d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Låt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Vi söker maximum av f givet bivillkoret att $g(x,y) = 0$.

$$g(x,y) = y - \frac{1}{1+x^2} = 0$$



Antag att γ kan parametriseras som $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ och att $(a,b) = (x(t_0), y(t_0)) = \varphi(t_0)$ är ett maxvärde för f på kurvan.

t_0 är en maxpunkt för $f(\varphi(t))$

Alltså måste $\frac{d}{dt}\left(f(\varphi(t))\right)\Big|_{t=t_0} = 0$

$t=t_0$

Enligt kedjeregeln:

$$= f'_x \cdot x'_t + f'_y \cdot y'_t$$

$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t))$

$\nabla f = (f'_x, f'_y)$

$$\frac{d}{dt}\left(f(\varphi(t))\right)\Big|_{t=t_0} = (\nabla f)(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\Big|_{t=t_0} = (\nabla f)(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0) = 0.$$

Alltså är $(\nabla f)(a,b)$ ortogonal mot $\varphi'(t_0)$.

Eftersom γ beskriver en nivåkurva $\{(x,y) : g(x,y) = 0\}$

Därför är även $(\nabla g)(x,y)$ ortogonal mot kurvan.

Speciellt gäller detta i punkten (a,b).

Alltså måste $(\nabla f)(a,b)$ och $(\nabla g)(a,b)$ vara parallella,

dvs $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(\nabla f)(a,b) = \lambda \cdot (\nabla g)(a,b).}$$

<u>Sats</u>: (Lagranges multiplikatormetod)

I en inre punkt $(a,b) \in D_f \cap D_g$ som löser problemet att maximera eller minimera f under bivillkoret $g(x,y) = 0$ gäller att $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ sådant att

$$(\nabla f)(a,b) = \lambda (\nabla g)(a,b).$$

Anmärkning: $\begin{cases} (\nabla f)(a,b) = \lambda (\nabla g)(a,b) \\ g(x,y)=0 \end{cases}$

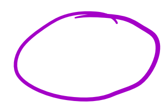
ger 3 ekvationer med 3 obekanta.

Ex: Bestäm max och min för funktionen

$f(x,y) = x+2y$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2+4y^2 = 4$.

Lösning: $(\nabla f)(x,y) = (1,2)$

$(\nabla g)(x,y) = (2x, 8y)$



I en extrempunkt måste vi ha

$$\begin{cases} (\nabla f)(x,y) = \lambda (\nabla g)(x,y) \\ g(x,y) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 8\lambda y \\ x^2+4y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2x} \\ \lambda = \frac{1}{4y} \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$$

Vi måste ha $\begin{cases} 2x = 4y \\ x^2+4y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2+4y^2=4. \end{cases}$

(1) insatt i (2):

$$4y^2+4y^2=4 \Leftrightarrow 2y^2=1 \qquad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Då gäller att $x = 2y = \pm\sqrt{2}$.

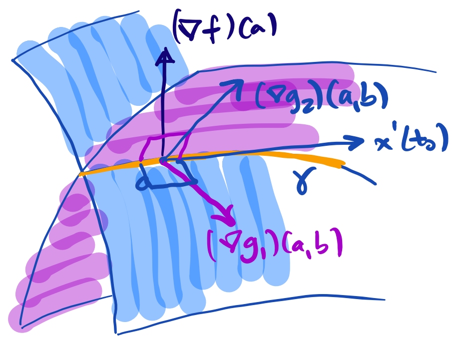
$$f\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \qquad \underline{\text{max}}!$$

$f(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2} - 2\frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$. min!

Fler bivillkor:

$f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$

Vi söker max/min av f på snittet av ytorna $g_1(x) = 0$ och $g_2(x) = 0$.



Antag att f är maximerad i en punkt a, med $g_1(a) = g_2(a) = 0$.
Vi antar att $(\nabla g_1)(a)$ inte är parallell med $(\nabla g_2)(a)$.

Snittet definierar en kurva γ med parametrisering $x = x(t)$, med $x(t_0) = a$. $f \circ x$ är då en envariabelfunktion med $\frac{d}{dt}(f \circ x)(t_0) = 0$.

Kedjeregeln: $(\nabla f)(a) \cdot x'(t_0) = 0$

$\nabla f, \nabla g_1, \nabla g_2$ är linjärt beroende.

Alltså kan $\boxed{\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2}$

Ex: Planet $x+y+z=2$ skär cylindern $y^2+z^2=4$. Bestäm den punkt i skärningen som ligger närmast origo.

Lösning: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ (avståndet i kvadrat)

$g_1(x,y,z) = x+y+z-2 = 0$

$g_2(x,y,z) = y^2+z^2-4 = 0$

I extrempunkter a gäller att

$$(\nabla f)(a) = \lambda_1 \cdot (\nabla g_1)(a) + \lambda_2 (\nabla g_2)(a). \qquad (*)$$

$(\nabla f)(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

$(\nabla g_1)(x,y,z) = (1,1,1)$

$(\nabla g_2)(x,y,z) = (0, 2y, 2z)$

$$(*) \quad \begin{cases} 2x = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 \\ 2y = \lambda_1 + 2\lambda_2 y \\ 2z = \lambda_1 + 2\lambda_2 z \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 2x \\ 2y = 2x + 2\lambda_2 y \\ 2z = 2x + 2\lambda_2 z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 2x \\ x = y - \lambda_2 y \\ x = z - \lambda_2 z \end{cases}$$

$y - \lambda_2 y = z - \lambda_2 z$

$y(1-\lambda_2) - z + \lambda_2 z = 0$

$y(1-\lambda_2) - z(1-\lambda_2) = 0$

$(y-z)(1-\lambda_2) = 0.$

$\lambda_2 = 1$ eller $y = z$.

Om $\lambda_2 = 1$, då gäller att $x = 0$ och $\lambda_1 = 0$

Om $y = z$, då gäller att $x = y(1-\lambda_2)$

och $\lambda_1 = 2y(1-\lambda_2)$.

Sedan tidigare $\begin{cases} x+y+z=2 \\ y^2+z^2=4 \end{cases}$

Fall 1: $x=0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$

$\begin{cases} y+z=2 \\ y^2+z^2=4 \end{cases}$ $y = 2-z$ insatt i (2):

$$(2-z)^2 + z^2 = 4$$
$$z^2 - 4z + 4 + z^2 = 4$$
$$2z^2 - 4z = 0$$
$$z(z-2) = 0.$$

Alltså är $\begin{cases} z=0 \\ y=2 \end{cases}$ eller $\begin{cases} z=2. \\ y=0. \end{cases}$

$f(0,2,0) = 2^2 = 4 = f(0,0,2)$ två kandidater.

Fall 2: $y=z$, $x = y(1-\lambda_2)$, $\lambda_1 = 2y(1-\lambda_2)$.

$\begin{cases} x+y+z=2 \\ y^2+z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=2 \\ 2y^2=4 \end{cases}$

Alltså är $y = \pm\sqrt{2}$. $x = 2-2y = 2 \mp 2\sqrt{2}$.

$f(2-2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = (2-2\sqrt{2})^2 + 2 + 2 = 4 - 8\sqrt{2} + 8 + 4 = 16 - 8\sqrt{2}.$

$f(2+2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (2+2\sqrt{2})^2 + 4 = 16 + 8\sqrt{2}.$

Minsta avståndet $\sqrt{16-8\sqrt{2}} = \sqrt{8(2-\sqrt{2})}$ sker i punkten $(2-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Alternativ:

$$\begin{vmatrix} — \nabla f — \\ — \nabla g_1 — \\ — \nabla g_2 — \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2y & 2z \end{vmatrix} = 0$$

(-1)

$$\begin{vmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 4x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix} = 4x(z-y) = 0$$

Antingen är $x=0$ eller $y=z$.