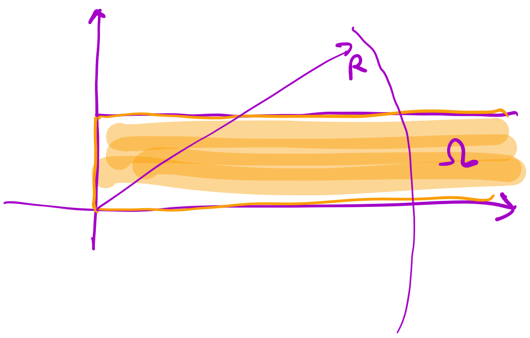
13 Optimering av kontinuerliga funktioner på icke-kompakta mängder

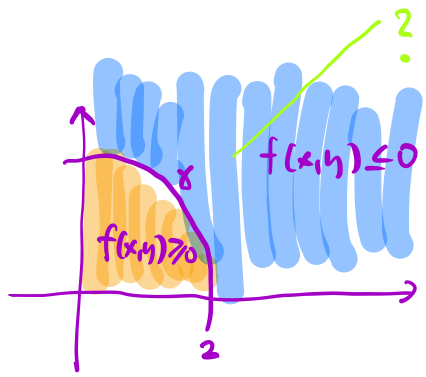


$K = \Omega \cap \overline{B_R}$

$M = \Omega \setminus K$

Ex: Låt $f(x,y) = x \cdot y \cdot (4 - x^2 - y^2)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Avgör om f har ett största och/eller minsta värde. Beräkna i så fall dessa.



Lösning: Notera att $f(x,y) \geq 0$ för alla $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Vi har även att $f(x,y) \leq 0$ för alla

$$(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 4\}.$$

Vi söker max. Låt därför $x^2 + y^2 \leq 4$.

Stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = y(4-x^2-y^2) + xy(-2x) = y(4-3x^2-y^2) = 0 \\ f'_y(x,y) = x(4-x^2-3y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4-3x^2-y^2 = 0 \\ 4-x^2-3y^2 = 0 \end{cases}$$

$3(1)-(2)$: $\quad 8-8x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \qquad$ (givet $x>0$)

$$y^2 = 4-3x^2 = 4-3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$$

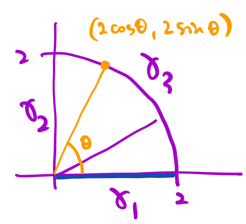
$$f(1,1) = 1\cdot 1\,(4-1^2-1^2) = \underline{\underline{2}}$$

$\underline{\text{Hörnen}}$: $\quad f(0,0) = f(2,0) = f(0,2) = 0$

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$$

$\gamma_3 = \{(2\cos\theta, 2\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$.

$\underline{\text{Randen}}$: $\quad \overset{\gamma_1}{f(x,0)} = \overset{\gamma_2}{f(0,y)} = 0$



$\underline{\gamma}$: $\quad \underset{\gamma_3}{f(2\cos\theta, 2\sin\theta)} = 0$

$\gamma_1 = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t \le 2\}$.

Ej deriverbara punkter saknas.

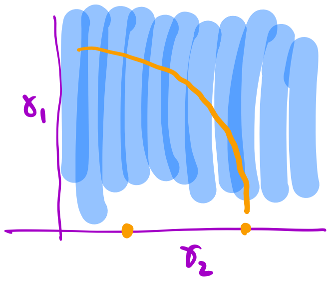
Största värdet för f är därmed 2.

Vi testar vad som händer då $y = x = t$ och $t \to \infty$.

$\varphi(t) = f(t,t) = t^2(4-2t^2) = 2t^2(2-t^2) \longrightarrow -\infty$, då $t \to \infty$

f saknar minvärde.

Ex: Låt $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$. Bestäm största och minsta värde för f i $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.



Hörn: $f(0,0) = 0$

Randen:

γ_1: $x = 0$, $y = t$, $0 \leq t < \infty$.

$\varphi_1(t) = f(0,t) = 0$.

γ_2: $x = t$, $y = 0$, $0 \leq t < \infty$

$\varphi_2(t) = f(t,0) = \dfrac{t}{1+t^2}$.

Stationära punkter: $\varphi_2'(t) = \dfrac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2} = 0 \iff t = 1$

$\varphi_2(1) = \dfrac{1}{1+1^2} = \underline{\dfrac{1}{2}}$ $\qquad \lim\limits_{t\to\infty} \varphi_2(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{1+t^2} = 0$

Stationära punkter till f (i det inre av D)

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{1+x^2+y^2-x\,2x}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\[2ex] f'_y(x,y) = \dfrac{-x\,2y}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} 1+y^2-x^2=0 \\ xy=0 \end{cases}$ orimligt ty $x>0$, $y>0$.

Stationära punkter saknas.

Ej deriverbara punkter saknas.

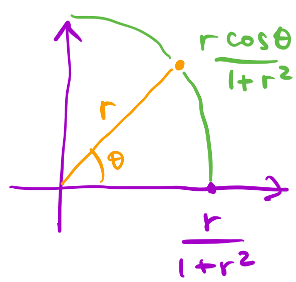
<u>funktionen vid oändligheten:</u>

Vi inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.
$y = r\sin\theta$

$$f = \frac{r\cos\theta}{1+r^2} \le \frac{r}{1+r^2} \le \frac{1}{2}. \quad (\text{då } \theta = 0)$$

$$\frac{x}{1+x^2+y^2}$$

$$f = \frac{r\cos\theta}{1+r^2} \geqslant 0 \quad \left(\text{då } \theta = \frac{\pi}{2}\right).$$



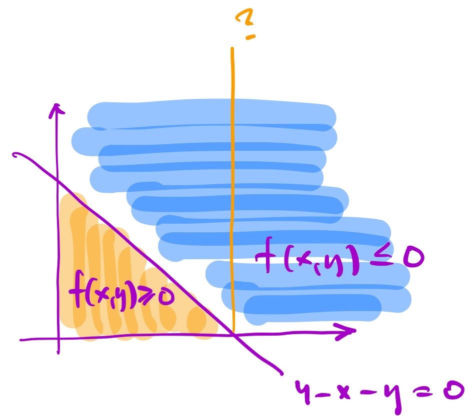
<u>Alt.</u>

$f(x,y) \geqslant 0$

$$0 \le f = \frac{r\cos\theta}{1+r^2} \le \frac{r}{1+r^2} \to 0, \text{ då } r \to \infty$$

maxvärde $\frac{1}{2}$, minvärde 0.

Ex: Undersök om $f(x,y)=(x+1)^3y^2(4-x-y)$ har ett största och/eller minsta värde då $x\geq 0$, $y\geq 0$?



Fall 1: $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, y\leq 4-x\}$

Här finns maximum för f.

Stationära punkter: $f'_x = 3(x+1)^2y^2(4-x-y)-(x+1)^3y^2=0$

$$f'_y=(x+1)^3\left(2y(4-x-y)-y^2\right)=0$$

$$\iff \begin{cases} 3y^2(4-x-y)-xy^2-y^2=0 \\ 8y-2xy-3y^2=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 12y^2-3xy^2-3y^3-xy^2-y^2=0 \\ 8-2x-3y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 11-4x-3y=0 \\ 8-2x-3y=0 \end{cases} \qquad (1)-(2):\ 3-2x=0 \iff x=\frac{3}{2}$$

$$(2):\ 3y=8-2x=8-2\cdot\frac{3}{2}=8-3=5 \Rightarrow y=\frac{5}{3}.$$

$$f\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{5}{3}\right) = \left(\tfrac{3}{2}+1\right)^3 \cdot \left(\tfrac{5}{3}\right)^2 \left(4 - \tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{3}\right) = \frac{5^3}{2^3} \cdot \frac{5^2}{3^2}\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5^6}{2^4 \cdot 3^3}$$

$$\boxed{4 - \frac{3}{2} - \frac{5}{3} = \frac{24-9-10}{6}}$$

$$(x+1)^3 y^2 (4-x-y)$$

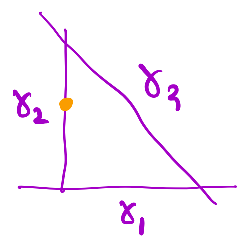
Hörnen: $f(0,0) = 0$

$f(0,4) = 1^3 \cdot 4^2 \cdot (4-4) = 0$

$f(4,0) = 0$

γ_1:

Då $y=0$, $x=t$ $\quad 0 \le t < \infty$.



$f(t,0) = 0$

γ_2:

Då $x=0$, $y=t$, $\quad 0 \le t \le 4$

$$\varphi_2(t) = f(0,t) = t^2(4-t)$$

Stationära punkter för φ_2.

$$\varphi_2'(t) = 2t(4-t) - t^2 = 8t - 3t^2 = t(8-3t) = 0 \iff t = \frac{8}{3}.$$

$$\varphi_2\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8^2}{3^2}\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{8^2}{3^2}\left(\frac{4}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4 \cdot 8^2}{3^3}}}.$$

γ_3: $f = 0$ ty $4 - x - y = 0$.

Största värdet är $\frac{5^6}{2^4 \cdot 3^3}$

Vi söker nu minsta värdet

Låt $x = 4$, $y = t$, $0 \leq t$.

$\lim_{t \to \infty} f(4,t) = \lim_{t \to \infty} (5)^3 \cdot t^2 \cdot (-t) = \lim_{t \to \infty} -5^3 t^3 = -\infty$.

Alltså saknas minvärde.