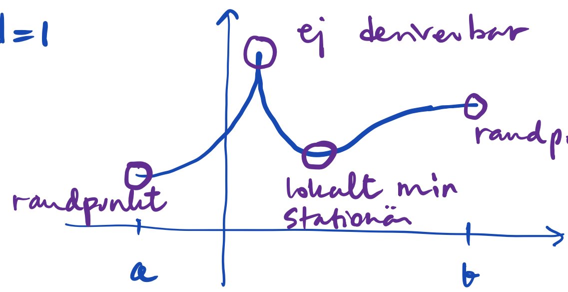
12 Optimering på kompakta mängder

Kompakt mängd är sluten och begränsad.

Ex: $d=1$



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$
f kontinuerlig.

$f: D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ kompakt och f är kontinuerlig.
Då har f ett största och minsta värde på D.

$f: D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ om f har ett lokalt extremvärde i en inre punkt $a\in D$ och f är partiellt deriverbar i a, då gäller att $(\nabla f)(a)=0$.

Låt K vara en kompakt delmängd av $\mathbb{R}^2$
$f: K\to\mathbb{R}$. Låt f vara kontinuerlig.

Vi har att f antar ett största och minsta värde på K.

Om f har partiella derivator i en extrempunkt så är $(\nabla f)=0$ i punkten.

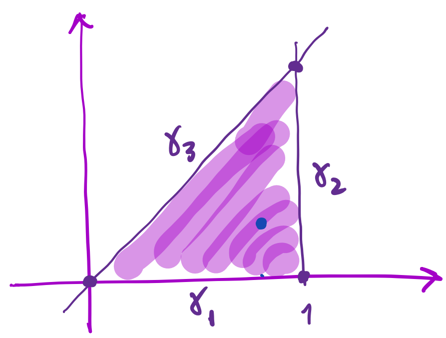
max- och minpunkter kan finnas på följande ställen

- Stationära punkter
- Ej deriverbara punkter (ej partiellt deriverbar)
- Randpunkter.

Ex: Bestäm det största och minsta värde

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-2x-y}$$

antar i mängden $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \le 1\}$.



Stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x = 2x e^{-2x-y} + (x^2+y^2)e^{-2x-y}\cdot(-2) = 0 \\ f'_y = 2y e^{-2x-y} + (x^2+y^2)e^{-2x-y}(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x^2 - y^2 = 0 \\ 2y - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \qquad (1)-(2):\ x - 2y = 0$$

$$x = 2y.$$

$x = 2y$ insatt i (2): $\quad 2y - (2y)^2 - y^2 = 0$

$$2y - 4y^2 - y^2 = 0 \iff 2y - 5y^2 = 0 \iff y(2-5y) = 0$$

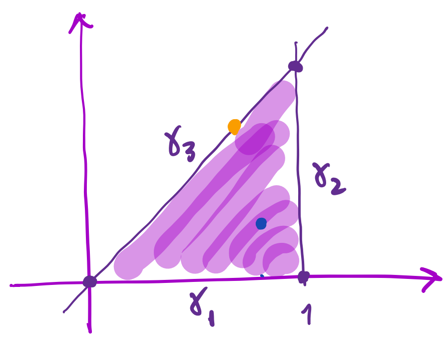
$$\iff y = \frac{2}{5}. \quad (\text{eftersom } y=0 \text{ ej är inre punkt i } K)$$

Stationära punkter är $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-2x-y}$$

Kandidat är $f\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{16}{25} + \frac{4}{25}\right)e^{-\frac{8}{5}-\frac{2}{5}} = \underline{\underline{\frac{4}{5}e^{-2}}}$

Ej deriverbara punkter: saknas.



Randen:

Hörnen: $f(0,0) = 0$

$f(1,1) = 2e^{-3}$

$f(1,0) = e^{-2}$

γ_1: $x = t, \; y = 0, \; 0 \le t \le 1.$

$\varphi_1(t) = f(t,0) = t^2 e^{-2t}$

Vi söker efter stationära punkter för φ_1.

$\varphi_1' = 2te^{-2t} + t^2e^{-2t}(-2) = 0 \iff t - t^2 = 0$

$\iff t=0$ eller $t=1$.

vilket är randpunkter.

$\gamma_2: \quad x=1 \quad , y=t \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$

$\varphi_2(t) = f(1,t) = (1+t^2)e^{-2-t}$

$\varphi_2'(t) = 2te^{-2-t} + (1+t^2)e^{-2-t}(-1) = 0$

$2t - 1 - t^2 = 0 \iff -(t-1)^2 = 0$

$\iff t = 1$

ej i det inre av $0 \leq t \leq 1$.

$\gamma_3: \quad x = t \quad , y = t \quad , \quad 0 \leq t \leq 1.$

$\varphi_3(t) = f(t,t) = 2t^2 e^{-3t}$

$\varphi_3'(t) = 4te^{-3t} + 2t^2 e^{-3t}(-3) = 0$

$\iff 4t - 6t^2 = 0 \iff t(2-3t) = 0$

$t=0$ är på randen och $t = \frac{2}{3}$ är en inre punkt

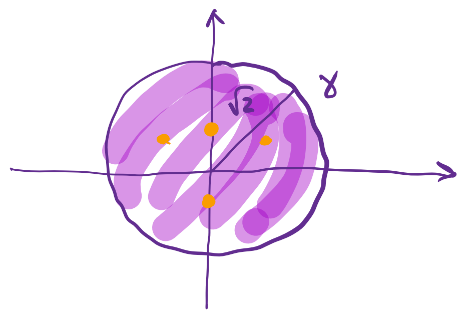
$\varphi(\frac{2}{3}) = f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 2 \cdot (\frac{2}{3})^2 e^{-3 \cdot \frac{2}{3}} = \underline{\frac{8}{9}e^{-2}}$

Kandidater $= \{ \frac{8}{9}e^{-2}, 0, 2e^{-3}, e^{-2}, \frac{4}{5}e^{-2} \}$

minimum är 0 och maximum är e^{-2}.

Ex: Bestäm största och minsta värde av

$$f(x,y) = (x^2+y)\,e^{-x^2-y^2} \quad \text{på cirkelskiva} \quad x^2+y^2 \le 2.$$



Lösning:

Stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 2x\,e^{-x^2-y^2} + (x^2+y)\,e^{-x^2-y^2}(-2x) = 0 \\ f'_y = e^{-x^2-y^2} + (x^2+y)\,e^{-x^2-y^2}(-2y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x(x^2+y) = 0 \\ 1 - 2y(x^2+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x^2-y) = 0 \\ 1-2y(x^2+y) = 0 \end{cases}$$

Enligt (1): $x=0$ eller $x^2+y=1$

Då $x=0$: (2) $1-2y\cdot y = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Då $x^2+y=1$: (2) $1-2y=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$.

Alltså är $x^2 = 1-y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Stationära punkter: $\left\{ \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \right\}$

$$f(x,y) = (x^2+y)e^{-x^2-y^2}$$

$$f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0^2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-0^2-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}}}$$

två kandidater

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \underline{\underline{e^{-3/4}}}$$

Ej deriverbara punkter saknas.

Randen: $x^2+y^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

$$\varphi(\theta) := f(x,y) = f(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta) = (2\cos^2\theta + \sqrt{2}\sin\theta)e^{-2}$$

Stationära punkter:

$$\varphi'(\theta) = e^{-2}\left(2\cdot 2\cos\theta(-\sin\theta) + \sqrt{2}\cos\theta\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta\cdot\left(\sqrt{2} - 4\sin\theta\right) = 0.$$

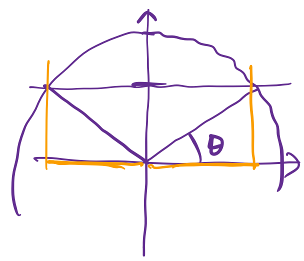
Antingen är $\cos\theta = 0$ eller $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Fall 1: $\cos\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$ eller $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Kandidater: $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-2} = \underline{\underline{\sqrt{2}\,e^{-2}}}$

$$\varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)e^{-2} = \underline{\underline{-\sqrt{2}\,e^{-2}}}$$

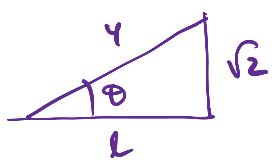
Fall 2: $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$



$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

eller

$\theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.



$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\ell^2 = 4^2 - \sqrt{2}^2 = 16 - 2 = 14$.

$\cos\theta = \frac{\ell}{4}$ $\qquad \cos^2\theta = \frac{\ell^2}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$.

$$\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2) = \left(2\cdot\frac{7}{8} + \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{-2}$$

$$= \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right)e^{-2} = \underline{\underline{\frac{9}{4}\,e^{-2}}}$$

Kandidater: $\left\{ \frac{9}{4}e^{-2},\ \pm\sqrt{2}e^{-2},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}},\ e^{-3/4} \right\}$

Alltså är maxvärdet $e^{-3/4}$ och minvärdet $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.