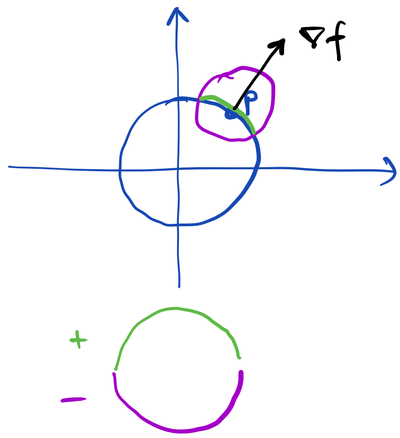
11 Implicit givna funktioner

Låt oss studera enhetscirkeln



$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - x^2 \quad , \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

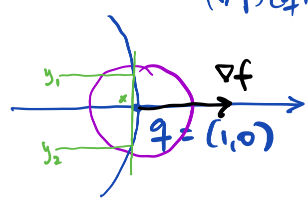
Kring punkten $p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ kan vi lösa ut y som funktion av x $(y = y(x))$ $\quad y = \sqrt{1-x^2}$ i en omgivning till p.

Vi säger att $y = y(x)$ är implicit given av ekvationen $f(x,y) = 1$.

Vad händer kring $q = (1,0)$?

$$(\nabla f)(q) = (f'_x(q), f'_y(q))$$

Kan vi lösa ut y som funktion av x kring q?



Vad är problemet?

∇f är parallell med x-axeln, dvs $f'_y(q) = 0$.

Sats (Implicita funktionssatsen): $(d=2)$

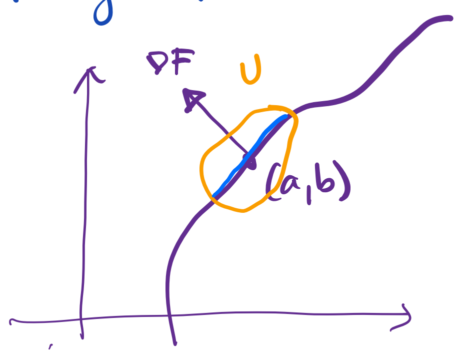
Låt $F \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ och $(a,b) \in D$ vara en punkt på nivåkurvan $F(x,y) = C$, dvs

$$(a,b) \in \{(x,y) \in D : F(x,y) = c\}$$

Om $F'_y(a,b) \neq 0$ så finns en omgivning U kring (a,b) sådan att restriktionen av F till nivåkurvan definierar en C^1-funktion $y = f(x)$.

För derivatan av denna funktion gäller

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$



Ex: $F(x,y) = x^2 + y^2 = 2$ kring $(1,1)$

$$y^2 = 2 - x^2 \overset{\text{kring } (1,1)}{\iff} y = \sqrt{2-x^2}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}} \qquad y'(1) = \frac{-1}{1} = \underline{\underline{-1}}.$$

Genom implicita funktionssatsen:

$$F'_y(x,y) = 2y \qquad F'_y(1,1) = 2 \neq 0$$

Vi kan alltså finna ett f sådant att $y=f(x)$ kring $(1,1)$.

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))} = -\frac{2x}{2f(x)} \rightarrow f'(1) = -\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1} = \underline{\underline{-1}}.$$

Bevis: Av derivatans formeln

Om $y=f(x)$

$$F(x,y)=C \iff F(x,f(x))=C$$

Derivera med avseende på x.

$$\frac{d}{dx}(F(x,f(x))) = 0$$ Med hjälp av kedjeregeln.

$$F'_x(x,f(x))\cdot 1 + F'_y(x,f(x))\cdot f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$$ ∎

Ex: Kan man lokalt kring $(0,0)$ ur ekvationen $x^3+y^4-y=0$ lösa ut

a) y som funktion av x

b) x som funktion av y.

Lösning: $F(x,y) = x^3 + y^4 - y$

a) $F'_y(x,y) = 4y^3 - 1$. $F'_y(0,0) = -1 \neq 0$.
Implicita funktionssatsen säger att vi kan lösa ut $y = y(x)$.

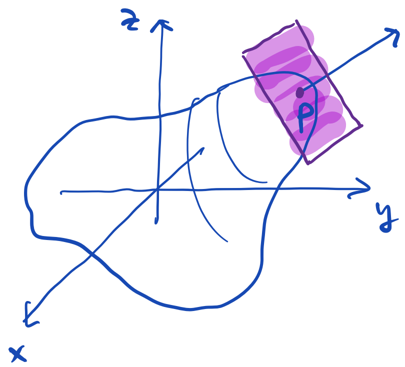
b) $F'_x(x,y) = 3x^2$, $F'_x(0,0) = 0$
Implicita funktionssatsen säger ingenting i detta fall.

$$x^3 + y^4 - y = 0 \iff x^3 = y - y^4 = y(1 - y^3)$$

$$\iff x = \left(y(1-y^3)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Svar: Ja, men inte från impl. funktionssatsen.

Dimension $d=3$:



$\nabla F = n$

$p = (a,b,c)$

$F(x,y,z) = \text{Konstant}.$

Tangentplanet ges av

$$n \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$$

$$F'_x(a,b,c)\cdot(x-a) + F'_y(a,b,c)\cdot(y-b) + F'_z(a,b,c)\cdot(z-c) = 0$$

När kan vi lösa ut z som funktion av x och y.
dvs $z = f(x,y)$ för något f.

Svar: Då $F'_z(a,b,c) \neq 0$.

$z = f(x,y)$, $F(x,y,f(x,y)) = C$

Enligt kedjeregeln

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,y,f(x,y))\right) = F'_x(x,y,f(x,y)) \cdot 1 + F'_y(x,y,f(x,y)) \cdot 0$$
$$+ F'_z(x,y,f(x,y)) \cdot f'_x(x,y)$$

$$f'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,f(x,y))}{F'_z(x,y,f(x,y))}$$

Ex: Kring vilka punkter (a,b,c) på ytan $x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz = 224$ kan man lösa ut $z = \varphi(x,y)$ så att φ får ett lokalt minimum i (a,b)?

Lösning: $F(x,y,z) := x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$

$F'_z = 4z^3 - 4xy \neq 0 \iff z^3 \neq xy$.

Antag att $z^3 \neq xy$, då finns $\varphi = \varphi(x,y)$.

Stationära punkter:

$$\begin{cases} \varphi'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{4x^3-4yz}{4z^3-4xy} = \dfrac{x^3-yz}{z^3-xy} = 0 \iff x^3-yz=0. \\ \varphi'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = 0 \iff y^3-xz=0. \end{cases}$$

Antag att $(x,y) \neq (0,0)$.

$$z = \frac{x^3}{y} = \frac{y^3}{x} \Rightarrow x^4-y^4=0 \iff (x^2-y^2)(x^2+y^2)=0$$

$$\iff (x-y)(x+y)=0 \iff y=\pm x.$$

Fall 1: $y=x=t$, $z=\dfrac{x^3}{y}=t^2$.

$$F(t,t,t^2) = t^4+t^4+t^8-4t^4 = 224.$$

$$t^8-2t^4-224=0 \iff t^4 = 1 \pm \sqrt{1+224} = 1\pm 15$$
$$= 16$$

Alltså är $t=\pm 2$.

Stationära punkter $(2,2)$ och $(-2,-2)$.

Fall 2: $y=-x=t$, $z=\dfrac{x^3}{y}=-t^2$

$$F(x,y,z) = F(-t,t,-t^2) = t^4+t^4+t^8-4t^4 = 224.$$

Samma som ovan $t = \pm 2$.

Stationära punkter $(2,-2)$ och $(-2,2)$.

Låt oss avgöra karaktären av dessa stationära punkter. Om (a,b) är stationär punkt

$$\varphi(a+h, b+k) = \varphi(a,b) + \frac{1}{2}\left(\varphi''_{xx}(a,b)h^2 + 2\varphi''_{xy}(a,b)h \cdot k + \varphi''_{yy}(a,b)k^2\right)$$

$$+ |(h,k)|^3 \cdot B(h,k). \quad (B \text{ begränsad} \ldots)$$

Söker $\varphi''_{xx}(x,y)$.

inre derivata av sammansatt funktion.

$$F(x,y,\varphi(x,y)) = 224 \iff x^4 + y^4 + \varphi^4 - 4xy\varphi = 224. \quad (1)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ på (1):

$$4x^3 + 4\varphi^3 \cdot \varphi'_x - 4y\varphi - 4xy\varphi'_x = 0$$

$$x^3 + \varphi^3 \cdot \varphi'_x - y\varphi - xy\varphi'_x = 0 \qquad (2)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ på (2):

$$3x^2 + 3\varphi^2 \cdot \varphi'_x \cdot \varphi'_x + \varphi^3 \varphi''_{xx} - y\varphi'_x - y\varphi'_x - xy\varphi''_{xx} = 0 \qquad (3).$$

$\frac{\partial}{\partial y}$ på (2):

$$3\varphi^2 \cdot \varphi'_y \cdot \varphi'_x + \varphi^3 \cdot \varphi''_{xy} - \varphi - y\varphi'_y - x\varphi'_x - xy\varphi''_{xy} = 0$$

Om (x,y) är en stationär punkt. $(\varphi'_x = \varphi'_y = 0)$

(3): $$3x^2 + \varphi^3 \varphi''_{xx} - xy\,\varphi''_{xx} = 0 \iff \varphi''_{xx}(x,y) = \frac{3x^2}{xy - \varphi(x,y)^3}$$

$$3x^2 + (\varphi^3 - xy)\,\varphi''_{xx} = 0$$

På liknande vis

$$\varphi''_{xy}(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{\varphi(x,y)^3 - xy}.$$

$$\varphi''_{yy}(x,y) = \frac{3y^2}{xy - \varphi(x,y)^3}.$$

Fall 1: $(x,y) = (2,2)$ $\qquad \varphi(2,2) = 4$

$$\varphi''_{xx}(2,2) = \frac{12}{4-64} = -\frac{12}{60} = -\frac{1}{5} = \varphi''_{yy}(2,2)$$

$$\varphi''_{xy}(2,2) = \ldots = \frac{1}{15}.$$

$$Q(h,k) = \varphi''_{xx}(2,2)h^2 + 2\varphi''_{xy}(2,2)hk + \varphi''_{yy}(2,2)k^2$$

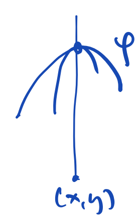
$$= -\frac{h^2}{5} + \frac{2}{15}hk - \frac{k^2}{5}.$$

$$= -\frac{1}{5}\left(h^2 - \frac{2}{3}hk\right) - \frac{k^2}{5}$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\left(h - \frac{k}{3}\right)^2 - \frac{k^2}{9}\right) - \frac{k^2}{5}.$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\left(h - \frac{k}{3}\right)^2 - \frac{k^2}{9} + k^2\right)$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\left(h - \frac{k}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}k^2\right)$$



Q negativt definit

φ har maxpunkt i $(2,2)$