

10 Funktioner från $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, Funktionalmatriser & Funktional-determinanter

Definition: Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $D \subset \mathbb{R}^n$ är öppen.

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$$

Vi säger att f är **differentierbar** om f_j är differentierbara, $1 \leq j \leq p$.

Om f är differentierbar så gäller

$$f(a+h) - f(a) = \begin{pmatrix} f_1(a+h) - f_1(a) \\ f_2(a+h) - f_2(a) \\ \vdots \\ f_p(a+h) - f_p(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) h_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) h_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) h_n \end{pmatrix} + |h| \begin{pmatrix} g_1(h) \\ g_2(h) \\ \vdots \\ g_p(h) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + |h| \underbrace{\begin{pmatrix} g_1(h) \\ g_2(h) \\ \vdots \\ g_p(h) \end{pmatrix}}_{= g(h)}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial (f_1, f_2, f_3, \dots, f_p)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}}_{\text{kalas för funktionalmatrisen för } f} \cdot h + |h| g(h)$$

kalas för funktionalmatrisen för f .

Ex: Bestäm funktionalmatrisen för polärt koordinatbyte

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

$$f(r, \theta) = (f_1(r, \theta), f_2(r, \theta)) \text{ där} \\ f_1(r, \theta) = r \cos \theta, \quad f_2(r, \theta) = r \sin \theta.$$

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (r, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Linearisierg: $f(a+h) = f(a) + \underbrace{f'(a)}_{\text{funktional matrisen}} \cdot h + |h|g(h)$

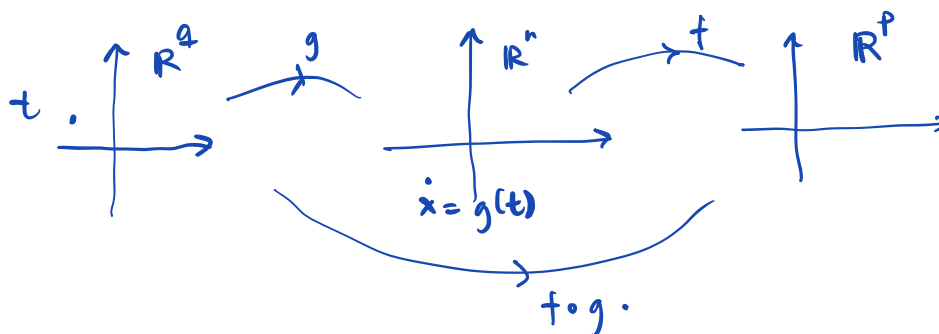
Ex: (Da f är en linjär avbildning)
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(a+h) = A(a+h) = Aa + Ah = f(a) + Ah + 0$$

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A.$$

Kedjeregeln: Betrakta $y = f(g(t))$



Vi vill visa att

$$(f \circ g)'(t) = f'(x) \cdot g'(t)$$

Enligt kedjeregeln har vi rad i och kolonn j i $(f \circ g)'(t)$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

$$= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_j} \end{pmatrix}$$

← kolonn j i matrisen $g'(t)$

(rad i) i matrisen $f'(x)$

Ansön är likheten visad.

Funktionaldeterminanter:

Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (dvs $n=p$) då blir funktionalmatrisen kvadratisk. I detta fall kan vi beräkna determinanten.

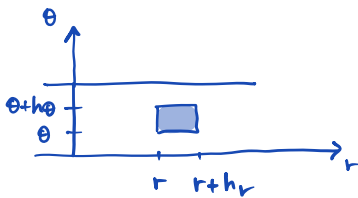
Determinanten kallas funktionaldeterminanten för f

Ansön $\det(f'(a)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$

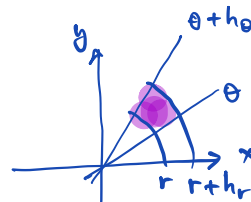
$$\frac{d(f_1, f_2, \dots, f_n)}{d(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Ex: Polänt koordinatbyte

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$



$$(r, \theta) \mapsto (x, y)$$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$A_{\text{Förr}} = h_\theta \cdot h_r$$

$$A_{\text{Efter}} = \left(\pi (r+h_r)^2 - \pi r^2 \right) \cdot \frac{h_\theta}{2\pi} = \frac{h_\theta}{2} (r^2 + 2rh_r + h_r^2 - r^2)$$

$$= rh_\theta h_r + \frac{h_r^2 h_\theta}{2}$$

$$\boxed{dx dy = r dr d\theta}$$

$$\frac{A_{\text{Efter}}}{A_{\text{Förr}}} = \frac{rh_\theta h_r + \frac{h_r^2 h_\theta}{2}}{h_\theta h_r} = r + \frac{h_r}{2} \rightarrow r, \text{ da } (h_r, h_\theta) \rightarrow 0.$$

Ex: Rymdpolänt koordinatbyte

$$\begin{cases} x(r, \theta, \varphi) = r \cos \varphi \sin \theta \\ y(r, \theta, \varphi) = r \sin \varphi \sin \theta \\ z(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \end{cases}$$

$$r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

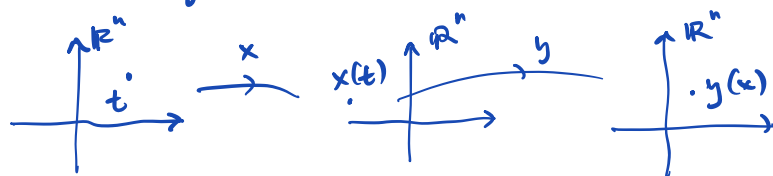
Funktionsmatrisen

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Funktionsdeterminanter

$$\begin{aligned}
 \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} &= \det \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} \right) = \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\theta & r \cos\varphi \cos\theta & -r \sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & r \sin\varphi \cos\theta & r \cos\varphi \sin\theta \\ \cos\theta^+ & -r \sin\theta^- & 0^+ \end{vmatrix} \\
 &= \cos\theta \begin{vmatrix} r \cos\varphi \cos\theta & -r \sin\varphi \sin\theta \\ r \sin\varphi \cos\theta & r \cos\varphi \sin\theta \end{vmatrix} + r \sin\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\theta & -r \sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & r \cos\varphi \sin\theta \end{vmatrix} \\
 &= \cos\theta (r^2 \cos^2\varphi \sin\theta \cos\theta + r^2 \sin^2\varphi \sin\theta \cos\theta) \\
 &\quad + r \sin\theta (r \cos^2\varphi \sin^2\theta + r \sin^2\varphi \sin^2\theta) \\
 &= r^2 \sin\theta \cos^2\theta + r^2 \sin^3\theta = r^2 \sin\theta (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \underline{\underline{r^2 \sin\theta}}
 \end{aligned}$$

Sats: Låt $y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.



Då gäller att $\frac{d(y)}{d(t)} = \frac{d(y)}{d(x)} \cdot \frac{d(x)}{d(t)}$.

(Allt är funktionsdeterminanter)

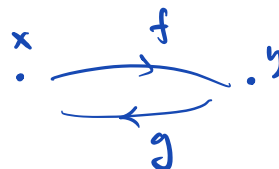
Beris: $(y \circ x)' = y' \cdot x'$ (kedjeregeln för funktionsmatriser)

$$\det((y \circ x)') = \det(y' \cdot x') = \det(y') \cdot \det(x').$$

Ex: Antag att $y = f(x)$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bijektiv
(inverterbar).

$$x = g(y), \quad g = f^{-1}$$

$$y = f(g(y))$$



Enligt satsen

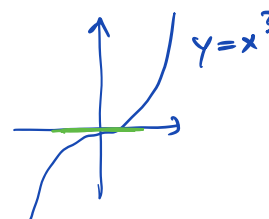
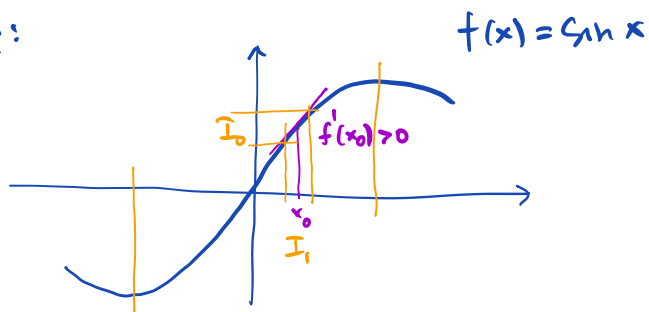
$$1 = \det(f'(x)) \cdot \det(g'(y))$$

$$1 = \frac{d(y)}{d(x)} \cdot \frac{d(x)}{d(y)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(y)}{d(x)} = \frac{1}{\frac{d(x)}{d(y)}}$$

Notera för matrisen $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Inversa funktionsatsen:

Ex:



Om $f'(x_0) \neq 0$ finns ett öppet intervall I_0 kring $f(x_0)$ och ett öppet intervall I_1 kring x_0 så att $f: I_1 \rightarrow I_0$ är en bijektiv avbildning och har därmed en invers.

Sats (Inversa funktionsatsen):

Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ öppen, $f \in C^1(D)$, $a \in D$.
Om $\det(f'(a)) \neq 0$ då finns öppna omgivningar
 U och V kring a och $f(a)$ sådana att
avbildningen $f: U \rightarrow V$ är bijektiv och inversen
 $f^{-1}: V \rightarrow U$ är av klass C^1 .

