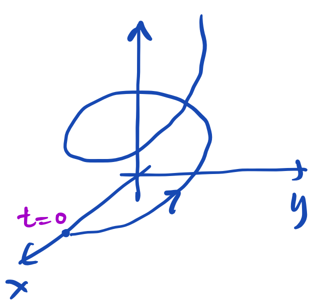
F1 Introduktion

Kursinnehåll:

Funktioner i flera variabler:

Ex: Höjden över marken på ett område $D \subset \mathbb{R}^2$ ges av funktionen $f(x,y) = x \cdot y^2$, $(x,y) \in D$.
$f: D \to \mathbb{R}$.

Ex: En partikel färdas i $\mathbb{R}^3$ enligt
$f(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \geq 0$
$f: \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} \to \mathbb{R}^3$

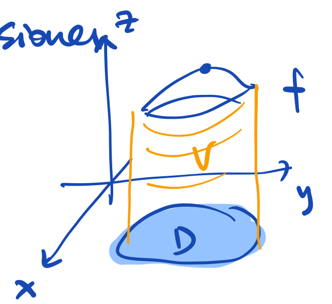


Ex: (Vektorfält) Ett magnetfält
$$B(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$$

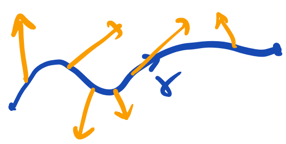
$B: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Avsnitt:
- Kontinuitet, deriverbarhet
- partiella derivator, differentierbarhet.
- Kedjeregeln
- Partiella differentialekvationer
- Optimeringsproblem

- Taylors formel i flera dimensioner
- Dubbelintegraler & trippel-integraler.



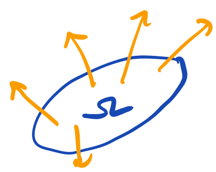
- Vektoranalys



$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\int_\gamma F \cdot ds$

- Flöden



$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Beräkna flödet av F genom ytan Ω.

Rummet $\mathbb{R}^n$:

Använder definierade begrepp från Linjär algebra.

Låt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ och $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$x, y \in \mathbb{R}^n$.

Addition:

$x+y := (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

Multiplikation med skälar

$s \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n$, $\quad s \cdot x := (sx_1, sx_2, \dots, sx_n)$

Skalärprodukt

$x \cdot y := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$.

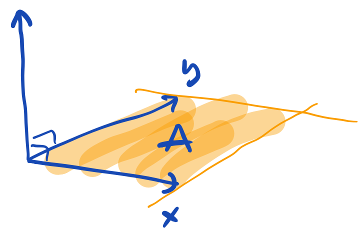
Vektorprodukt: (bara om $n=3$)

$e_1 = (1,0,0) = i$
$e_2 = (0,1,0) = j$
$e_3 = (0,0,1) = k$

$x, y \in \mathbb{R}^3$

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

$$A = |x \times y|.$$



Längden: $|x| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}$

Avståndet mellan x och y ges av $|x-y|$.

Vinkeln θ mellan x och y ges av

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}.$$

Cauchy-Schwarz olikhet:
Låt $x, y \in \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|.$$

Likhet gäller endast när x är parallell med y, dvs $x = ay$, för något $a \in \mathbb{R}$.

Bevis: Om $x = 0$ $\quad VL = 0 = HL$

Antag nu att $x \neq 0$.

Bilda $u = t \cdot x + y$, $t \in \mathbb{R}$. $\quad (u \in \mathbb{R}^n)$.

$$0 \leq |u|^2 = u \cdot u = (tx+y)(tx+y)$$

$$= t^2 (x \cdot x) + 2t(x \cdot y) + y \cdot y$$

$$= t^2 |x|^2 + 2t(x \cdot y) + |y|^2$$

$$= |x|^2 \left(t^2 + \frac{2t(x \cdot y)}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)$$

Kvadrat-komplettera

$$= |x|^2 \left(\left(t + \frac{(x \cdot y)}{|x|^2}\right)^2 - \frac{(x \cdot y)^2}{|x|^4} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)$$

$$\left(t + \frac{(x \cdot y)}{|x|^2}\right)^2 = t^2 + \frac{2t(x \cdot y)}{|x|^2} + \frac{(x \cdot y)^2}{|x|^4}$$

Välj $t = -\dfrac{(x \cdot y)}{|x|^2}$

Alltså

$$0 \leq |x|^2 \left(\frac{|y|^2}{|x|^2} - \frac{(x \cdot y)^2}{|x|^4} \right) = |y|^2 - \frac{(x \cdot y)^2}{|x|^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x \cdot y)^2}{|x|^2} \leq |y|^2 \quad \Leftrightarrow (x \cdot y)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x \cdot y)^2} \leq |x| \cdot |y|$$

$$\Leftrightarrow |x \cdot y| \leq |x| \cdot |y| .$$

Första delen klar.

Vill visa att $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$ om och endast om x är parallell med y.

$(\Leftarrow)$: Antag att x är parallell med y, dvs $\exists a\in\mathbb{R}$ sådant att $x = a\cdot y$.

$$VL = |x\cdot y| = |a(y\cdot y)| = |a|\,|y|^2 = |ay|\cdot|y| = |x|\cdot|y|.$$
$$= HL.$$

$(\Rightarrow)$: Antag att $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$

$$0 = |u|^2 \iff u = 0 \iff u = tx+y = 0$$
$$\iff y = -t\cdot x,\quad t\in\mathbb{R}.$$
$$\iff x \text{ och } y \text{ är parallella.}$$

$\blacksquare$

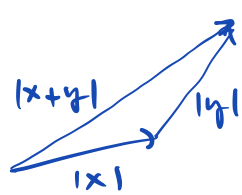
Låt $x,y\in\mathbb{R}^n$

$|(x\cdot y)| \le |x|\cdot|y|$

$$|x+y|^2 = (x+y)(x+y) = |x|^2 + 2(x\cdot y) + |y|^2$$

$$\le |x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2$$

$$\iff |x+y| \le |x|+|y|. \quad \text{(Triangelolikhet)}$$



Omvända triangelolikheten:

Låt $x, y \in \mathbb{R}^n$.

triangelolikheten

$$|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$$

Symmetri ger att även

$$|y| \leq |x+y| + |x|$$

Alltså
$$\begin{cases} |x| - |y| \leq |x+y| \\ |y| - |x| \leq |x+y| \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \qquad \text{(Omvända triangelolikheten)}$$

Sats: Låt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$|x_k| \leq |x| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \,. \quad , \quad 1 \leq k \leq n \text{ (heltal)}$$

Bevis: $|x_k| \leq |x|. \Longleftrightarrow |x_k|^2 \leq |x|^2 = (x \cdot x)$

$$\Longleftrightarrow x_k^2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}^{\,2}$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 + \dots + x_n^2 \,.$$

Nu till $|x| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$$|u+v| \leq |u| + |v|$$

$$VL = |x| = |(x_1, x_2, \dots, x_n)| = |(x_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)|$$

triangelolikheten

$$\leq |(x_1, 0, 0, \dots, 0)| + |(0, x_2, x_3, \dots, x_n)|$$

$$= |x_1| + |(0, x_2, 0, 0, \dots, 0) + (0, 0, x_3, x_4, \dots, x_n)|$$

$$\leq |x_1| + |x_2| + |(0, 0, x_3, x_4, \dots, x_n)| \leq \dots \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$\blacksquare$