

1.8 Avgör vilka av mängderna

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\},$$

$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\},$$

$$M_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1/4\},$$

$$M_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y < 11\},$$

$$M_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + 2y| \leq 2\},$$

$$M_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, 0 < x < 1, y \leq 1\},$$

$$M_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \leq -4 - 4x - 4y - x^2 - y^2\},$$

som är

- a) öppna
- b) slutna
- c) varken öppna eller slutna
- d) begränsade
- e) kompakta

1.17 Temperaturen i en punkt (x, y, z) i en kropp är

$$T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y$$

Beskriv nivåytorna för nivåerna 0, 1, 2 och 3.

Nivåyta 0:

Nivåyta 1:

Nivåyta 2:

Nivåyta 3:

1.25 Avgör om följande gränsvärden existerar och beräkna dem i förekommande fall ($\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $|\vec{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$).

a)

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{\sin |\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^2 + x_1 x_2 x_3}$$

b)

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{e^{|\vec{x}|^2} - 1}{|\vec{x}|^2 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1}$$

c)

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{\ln(1 + |\vec{x}|^2)}{|\vec{x}|^2 + \sin(x_1 x_2 x_3)}$$

2.11 Bestäm tangentplanet i punkten $p = (1, 1, 5)$ till paraboloiden

$$z = x^2 + 4y^2$$

- 2.21 a) Transformera uttrycket $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ genom substitutionen

$$\begin{cases} u = x - ky \\ v = x + ky \end{cases} \quad \text{där } k \text{ är ett tal } \neq 0.$$

- b) Bestäm den lösning $f(x, y)$ till differentialekvationen

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

som uppfyller villkoret $f(x, 0) = \sin x$.

Ledning: Gör substitutionen i a) och välj k lämpligt!

2.34 Betrakta funktionen $f(x, y) = xy \sin x$ i punkten $(\pi/2, 1)$.

- a) I vilken riktning växer f snabbast? Hur stor är tillväxten i den riktningen?
- b) Beräkna riktningsderivatan av f i riktningen $(-3, 4)$.
- c) Bestäm tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i den punkt där $x = \pi/2$ och $y = 1$.