



Tentamen i kursen SF1674

Datum: 2022-06-08

Skrivtid: 14:00 – 19:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper, passare och penna

Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	28	25	22	19	16

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Beräkna följande gränsvärden eller förklara varför de inte existerar

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + |x|^2)}{|x|^2 + x_1 x_2 x_3},$$

där $x = (x_1, x_2, x_3)$,

(b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4}$$

Lösning:

(a) Från standardgränsvärdet

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1$$

får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + |x|^2)}{|x|^2 + x_1 x_2 x_3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + |x|^2)}{|x|^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{x_1 x_2 x_3}{|x|^2}} = 1,$$

då $x \rightarrow 0$, eftersom

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x_1 x_2 x_3}{|x|^2} \right| = \lim_{r \rightarrow 0} r |\cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta| \leq \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$$

(b) Låt $x = y = t$, då får vi att för $t \neq 0$,

$$\frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4} = \frac{t^4}{3t^4} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3},$$

då $t \rightarrow 0$. Men om $x = s$ och $y = 0$, så följer att för $s \neq 0$,

$$\frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4} = 0 \rightarrow 0,$$

då $s \rightarrow 0$. Alltså existerar inte gränsvärdet.

2. Visa att ekvationen

$$\sin(xy) - \ln(x+y) = 0$$

lokalt kring punkten $(0, 1)$ definierar y som en kontinuerligt deriverbar funktion av x och beräkna

$$\frac{dy}{dx}(0).$$

Lösning: Bilda $F(x, y) = \sin(xy) - \ln(x+y)$.

Först konstaterar vi att $F(0, 1) = 0$, vilket säger att $(0, 1)$ ligger på ytan.

Vi ser att

$$F'_y(x, y) = x \cos(xy) - \frac{1}{x+y},$$

och därmed att $F'_y(0, 1) = -1 \neq 0$. Alltså kan vi lösa ut $y = y(x)$ i en omgivning till punkten $(0, 1)$.

Eftersom $F(x, y(x)) = 0$ så gäller att

$$\frac{d}{dx} (F(x, y(x))) = F'_1(x, y(x)) + F'_2(x, y(x))y'(x) = 0$$

och därmed

$$y'(x) = -\frac{F'_1(x, y(x))}{F'_2(x, y(x))}.$$

Vi har att $F'_1(x, y) = y \cos(xy) - \frac{1}{x+y}$ och $F'_2(x, y) = x \cos(xy) - \frac{1}{x+y}$.

Alltså

$$y'(x) = -\frac{(x+y)y \cos(xy) - 1}{(x+y)x \cos(xy) - 1},$$

och därmed

$$y'(0) = 0.$$

3. Beräkna

$$\iint_D x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy$$

där

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Lösning: Vi nyttjar polära koordinater och får

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta \sqrt{1 - r^2} r \, dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta \cdot \int_0^1 r^3 \sqrt{1 - r^2} \, dr \end{aligned}$$

Den första integralen löses exempelvis med hjälp av $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, vilket ger

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Den andra integralen löses genom variabelbytet $r = \sin \varphi$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^3 \sqrt{1 - r^2} \, dr &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= - \left[\frac{\cos^3 \varphi}{3} - \frac{\cos^5 \varphi}{5} \right]_0^{\pi/2} \\ &= 1/3 - 1/5 = 2/15. \end{aligned}$$

Tillsammans blir det

$$\iint_D x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy = \pi/30.$$

4. Lös den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1,$$

genom att införa de nya variablerna $u = x + \alpha y$ och $v = x + \beta y$. Ange svaret i de ursprungliga variablerna x och y .

Lösning: Låt $f(x, y) = g(u, v)$. Vi får att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v}.$$

Vi försätter för att få uttrycken för andraderivatorna:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \alpha \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2(\alpha + \beta) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Tillsammans blir det

$$(1 + \alpha - 6\alpha^2)g''_{uu} + (1 + \beta - 6\beta^2)g''_{vv} + 2(1 + \alpha + \beta - 6\alpha\beta)g''_{uv} = 1.$$

Ekvationen

$$1 + \alpha - 6\alpha^2 = 0$$

har lösningarna $\alpha_1 = 1/2$ och $\alpha_2 = -1/3$. Om vi låter $\alpha = 1/2$ och $\beta = -1/3$ så får vi

$$g''_{uv} = 6/25.$$

Alltså är

$$g(u, v) = \frac{6uv}{25} + C_1(u) + C_2(v),$$

där $C_1, C_2 \in C^2$.

Uttryckt i x och y får vi

$$f(x, y) = \frac{6(x + y/2)(x - y/3)}{25} + C_1(x + y/2) + C_2(x - y/3).$$

5. Bestäm det minsta värdet av

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

då $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$.

Lösning: Bilda $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ och $G(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$. Vi söker alltså minsta värdet av f under bivillkoret $G(x) = 1$.

Vi kan omformulera problemet till att söka efter x sådana att

$$(\nabla f)(x) = \lambda(\nabla G)(x),$$

för något λ . Detta leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 = \lambda \\ 2x_2 = -\lambda \\ 2x_3 = 2\lambda \\ 2x_4 = -\lambda \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Alltså är $x_2 = -x_1$, $x_3 = 2x_1$ och $x_4 = -x_1$ och

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = x_1 + x_1 + 4x_1 + x_1 = 7x_1 = 1.$$

Alltså gäller att

$$\begin{cases} x_1 = 1/7 \\ x_2 = -1/7 \\ x_3 = 2/7 \\ x_4 = -1/7 \end{cases}$$

och därmed är en kandidat $f(1/7, -1/7, 2/7, -1/7) = 7/7^2 = 1/7$.

Eftersom f kan anta godtyckligt stora värden, exempelvis längs linjen $x = (1+t, t, 0, 0)$, då $t \rightarrow \infty$ och är icke-negativ, så är vår kandidat ett minsta värde.

6. (a) Definiera vad som menas med riktningsderivata.
(b) Visa att gradienten av en funktion pekar i den riktning där funktionen växer snabbast.

Lösning: Se boken.

7. Beräkna flödet av vektorfältet $u(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 2x_1^2)$ upp genom paraboloiden $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2$, där $x_3 \geq 0$.

Lösning: Låt Y vara funktionsytan $x_3 = f(x_1, x_2)$, där

$$f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$$

med

$$D_f = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Flödet ges av

$$\Phi = \iint_Y u \cdot N \, dS,$$

där N är den uppåtriktade normalen och dS är ytelementet.

Eftersom Y är en funktionsyta så gäller att (x_1, x_2) kan användas som parametrar och

$$N(x_1, x_2) = \frac{f'_{x_1}(x_1, x_2) \times f'_{x_2}(x_1, x_2)}{|f'_{x_1}(x_1, x_2) \times f'_{x_2}(x_1, x_2)|}$$

vilket ger

$$N \, dS = f'_{x_1}(x_1, x_2) \times f'_{x_2}(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2 = (2x_1, 2x_2, 1) \, dx_1 dx_2.$$

Alltså blir

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} (x_1, x_2, 2x_1^2) \cdot (2x_1, 2x_2, 1) \, dx_1 dx_2 \\ &= 2 \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq 1} 2x_1^2 + x_2^2 \, dx_1 dx_2 \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta) d\theta \int_0^1 r^3 \, dr \\ &= 2 \left(2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \right) \frac{1}{4} \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

8. Undersök om den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_{\Omega} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy(1 - x^2 - y^2)}} \, dx dy$$

är konvergent, där

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}.$$

Lösning: Vi konstaterar att integralen är generaliserad vid hela sin rand. Låt oss bilda

$$\Omega_\varepsilon = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon \leq r \leq 1 - \varepsilon, \varepsilon \leq \theta \leq \pi/2 - \varepsilon\}.$$

Då gäller att f definierad som

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy(1 - x^2 - y^2)}}$$

är kontinuerlig och positiv på Ω_ε och Ω_ε är kompakt sådan att för varje kompakt delmängd $K \subset \Omega$ gäller att det existerar ε sådant att $K \subset \Omega_\varepsilon$.

Låt K vara en kompakt delmängd av Ω och låt ε vara sådant att $K \subset \Omega_\varepsilon$. Då gäller att

$$\begin{aligned} \iint_K \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy(1 - x^2 - y^2)}} dx dy &\leq \iint_{\Omega_\varepsilon} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy(1 - x^2 - y^2)}} dx dy \\ &= \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\cos \theta \sin \theta (1 - r^2)}} r dr d\theta \\ &= \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta \sin \theta}} \cdot \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} \end{aligned}$$

Av symmetriskäl är

$$\int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta \sin \theta}} = 2 \int_\varepsilon^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta \sin \theta}},$$

och denna integral är konvergent eftersom den kan jämföras med

$$\int_\varepsilon^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}},$$

ty

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{\cos \theta \sin \theta}}}{\frac{1}{\sqrt{\theta}}} = \sqrt{\frac{\theta}{\cos \theta \sin \theta}} \rightarrow 1,$$

då $\theta \rightarrow 0$.

Den andra integralen kan beräknas enligt följande

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} = \left[-\sqrt{1 - r^2} \right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} = -\sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)} + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \rightarrow 1,$$

då $\varepsilon \rightarrow 0$.

Alltså är integralen konvergent.

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!