



Tentamen i kursen SF1674

Datum: 2022-06-08

Skrivtid: 14:00 – 19:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper, passare och penna

Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	28	25	22	19	16

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Beräkna följande gränsvärden eller förklara varför de inte existerar

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + |x|^2)}{|x|^2 + x_1 x_2 x_3},$$

där $x = (x_1, x_2, x_3)$,

(b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4}$$

2. Visa att ekvationen

$$\sin(xy) - \ln(x + y) = 0$$

lokalt kring punkten $(0, 1)$ definierar y som en kontinuerligt deriverbar funktion av x och beräkna

$$\frac{dy}{dx}(0).$$

3. Beräkna

$$\iint_D x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy$$

där

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

4. Lös den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1,$$

genom att införa de nya variablerna $u = x + \alpha y$ och $v = x + \beta y$. Ange svaret i de ursprungliga variablerna x och y .

5. Bestäm det minsta värdet av

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$\text{då } x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1.$$

6. (a) Definiera vad som menas med riktningsderivata.

(b) Visa att gradienten av en funktion pekar i den riktning där funktionen växer snabbast.

7. Beräkna flödet av vektorfältet $u(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 2x_1^2)$ upp genom paraboloiden $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2$, där $x_3 \geq 0$.

8. Undersök om den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_{\Omega} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy(1 - x^2 - y^2)}} dx dy$$

är konvergent, där

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}.$$

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!