Tentamen i kursen SF1674 Flervariabelanalys

Datum: 2022-03-18
Skrivtid: 8:00 – 13:00
Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper och penna
Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	28	25	22	19	16

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar introduceras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Låt $f(x, y, z) = xy + e^{yz} + z$.

   (a) Bestäm derivatan av f i punkten $(3, 1, 0)$ längs enhetsvektorn $v = (a, b, c)$.

   (b) Hur ska v väljas för att derivatan skall bli så stor som möjligt?

Lösning: Gradienten ges av

$$(\nabla f)(x, y, z) = (y, x + ze^{yz}, ye^{yz} + 1)$$

och speciellt

$$(\nabla f)(3, 1, 0) = (1, 3, 2).$$

Derivatan i riktningen av $v = (a, b, c)$ är

$$f'_v(3, 1, 0) = (\nabla f)(3, 1, 0) \cdot (a, b, c) = (1, 3, 2) \cdot (a, b, c) = a + 3b + 2c.$$

Riktningsderivatan är maximerad i gradientens riktning, alltså då

$$v = \frac{(1, 3, 2)}{\sqrt{1 + 3^2 + 2^2}} = \frac{(1, 3, 2)}{\sqrt{14}}.$$

2. Finn alla lokala max- och minpunkter till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3\ln(1 + xy),$$

då $x > 0$ och $y > 0$.

Lösning: Vi söker stationära punkter:

$$f'_x(x, y) = 2x - \frac{3y}{1 + xy} = \frac{2x + 2x^2y - 3y}{1 + xy} = 0$$

och

$$f'_y(x, y) = 2y - \frac{3x}{1 + xy} = \frac{2y + 2xy^2 - 3x}{1 + xy} = 0.$$

Alltså har vi $x^2 - y^2 = 0$ eller $x = y$. Insatt i första ekvationen ger

$$2x + 2x^3 - 3x = x(2x^2 - 1) = 0$$

vilket betyder $(x, y) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ som enda stationära punkt. För att veta om detta är en extrempunkt så bestämmer vi den kvadratiska delen av Taylors formel i den stationära punkten.

$$\begin{aligned}
f''_{xx} &= \frac{(2 + 4xy)(1 + xy) - (2x + 2x^2y - 3y)y}{(1 + xy)^2} = \frac{2 + 4xy + 2x^2y^2 + 3y^2}{(1 + xy)^2} \\
f''_{yy} &= \frac{(2 + 2x)(1 + xy) - (2y + 2xy - 3x)x}{(1 + xy)^2} = \frac{2 + 4xy + 2x^2y^2 + 3x^2}{(1 + xy)^2} \\
f''_{xy} &= \frac{(2x^2 - 3)(1 + xy) - (2x + 2x^2y - 3y)x}{(1 + xy)^2} = -\frac{3}{(1 + xy)^2}
\end{aligned}$$

Ovanstående resultat är i linje med att f är symmetrisk i x och y.
Den kvadratiska formen i $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ges då av

$$\begin{aligned}
Q(h, k) &= \frac{1}{2}\left(f''_{x,x}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})h^2 + 2f''_{xy}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})hk + f''_{yy}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})k^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}h^2 - \frac{8}{3}hk + \frac{8}{3}k^2\right) \\
&= \frac{4}{3}(h^2 - hk + k^2) = \frac{4}{3}\left((h - k/2)^2 + 3k^2/4\right) > 0,
\end{aligned}$$

då $(h, k) \neq (0, 0)$. Eftersom kvadratiska formen är positivt definit har f ett lokalt minimum i $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, vilket är den enda lokala extrempunkten som finns.

3. Lös den partiella differentialekvationen

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad x > 0,\ y > 0,$$

som uppfyller att $f(u,u) = 2u^2$, genom att införa de nya variablerna $s = x^2 + y^2$ och $t = x^2 - y^2$.

Lösning: Enligt kedjeregeln får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial s} + 2x\frac{\partial f}{\partial t}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 2y\frac{\partial f}{\partial s} - 2y\frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}$$

Alltså är

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(2x\frac{\partial f}{\partial s} + 2x\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{1}{y}\left(2y\frac{\partial f}{\partial s} - 2y\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 4\frac{\partial f}{\partial t} = 1.$$

Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4}$$

och

$$f = \frac{t}{4} + g(s) = \frac{x^2 - y^2}{4} + g(x^2 + y^2),$$

för någon C^1-funktion g. Randvillkoret $f(u,u) = 2u^2$ ger att $g(s) = s$ och

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{4} + x^2 + y^2.$$

Verifiera din lösning!

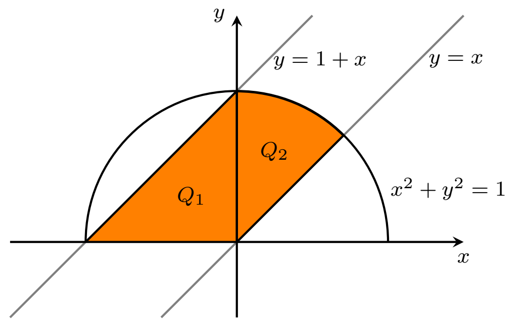
4. Beräkna

$$\iint_Q xy\,dxdy$$

där

$$Q = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le y - x \le 1,\ y \ge 0\right\}$$

Lösning: Området kan delas upp i två delar Q_1 och Q_2,



Integralen över Q_1 ges av

$$\int_{-1}^{0} x \left(\int_{0}^{1+x} y\, dy \right) dx = \int_{-1}^{0} \frac{x(1+x)^2}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{24}$$

och över Q_2 genom polärt koordinatbyte

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{0}^{1} r^3 \sin\theta \cos\theta\, dr d\theta = \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{16}.$$

Alltså är

$$\iint_{Q} xy\, dxdy = \iint_{Q_1} xy\, dxdy + \iint_{Q_2} xy\, dxdy = -\frac{1}{24} + \frac{1}{16} = \frac{3-2}{48} = \frac{1}{48}.$$

5. Bestäm kurvintegralen

$$\int_{\gamma} u \cdot dr,$$

där $u(x, y) = (-xy, x^2 - y^2)$ och kurvan γ är den del av ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$ som ligger i första kvadranten orienterat moturs.

Lösning (Alt 1): Låt $r(\theta) = (2\cos\theta, \sin\theta)$, där $0 \le \theta \le \pi/2$ vara en parametrisering av γ. Vi har då att $r'(\theta) = (-2\sin\theta, \cos\theta)$ och

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} u \cdot\, dr &= \int_{0}^{\pi/2} (-2\cos\theta\sin\theta, 4\cos^2\theta - \sin^2\theta) \cdot (-2\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi/2} (4\cos\theta\sin^2\theta + 4\cos^3\theta - \cos\theta\sin^2\theta)\, d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi/2} \cos\theta(3\sin^2\theta + 4(1 - \sin^2\theta))\, d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi/2} \cos\theta(4 - \sin^2\theta)\, d\theta.
\end{aligned}$$

Här kan vi använda variabelbytet $t = \sin\theta$ och får

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta(4 - \sin^2\theta)\, d\theta = \int_0^1 (4 - t^2)\, dt = 4 - 1/3 = 11/3.$$

Lösning (Alt 2): Låt oss sluta till kurvan längs med axlarna. Låt

$$D = (x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + 4y^2 \leq 4.$$

Enligt Greens formel får vi

$$\int_{\partial D} u \cdot dr = \iint_D 3x\, dxdy = 3\int_0^1 \int_0^{\pi/2} 2r\cos\theta 2r\, d\theta dr = 4.$$

Vi måste kompensera med kurvintegralerna längs axlarna. Vi börjar med den längs x-axeln

$$\int_0^2 (0, x^2) \cdot (dx, dy) = 0,$$

eftersom $dy = 0$. Nu till den längs y-axeln

$$\int_0^1 (0, -y^2) \cdot (dx, dy) = -\int_0^1 y^2\, dy = 1/3.$$

Kurvintegralen blir därmed $4 - 1/3 = 11/3$.

6. (a) Definiera vad som menas med att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i en punkt $a \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Visa genom användning av definitionen att $f(x, y) = x^2 y$ är differentierbar i punkten $(1, 1)$. Det är alltså inte möjligt att argumentera att f är av klass C^1 och därmed differentierbar.

Lösning: Vi säger att f är differentierbar i a om det finns reella konstanter $A_1, A_2, \ldots, A_n$ och en funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sådana att

$$f(a + h) - f(a) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_n h_n + |h|\rho(h),$$

där $\rho(h) \to 0$, då $h \to 0$.

För att visa att $f(x, y) = x^2 y$ är differentierbar i punkten $(1, 1)$ bildar vi bildar vi

$$\begin{aligned} f(1 + h_1, 1 + h_2) - f(1, 1) &= (1 + h_1)^2(1 + h_2) - 1 \\ &= 2h_1 + h_1^2 + h_2 + 2h_1h_2 + h_1^2h_2 \\ &= 2h_1 + h_2 + |h|\frac{h_1^2 + 2h_1h_2 + h_1^2h_2}{|h|} \end{aligned}$$

Alltså är

$$
\begin{aligned}
|\rho(h)| &= \left|\frac{h_1^2 + 2h_1h_2 + h_1^2 h_2}{|h|}\right| \\
&\leq \left|r\cos^2\theta + 2r\cos\theta\sin\theta + r^2\cos^2\theta\sin\theta\right| \\
&\leq r\,|3+r| \to 0,
\end{aligned}
$$

då $r \to 0$.

7. Beräkna flödet av vektorfältet $u(x,y,z) = (x + e^y, 1, 2z + \sin x)$ ut genom det begränsade området

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2+2y^2} \leq z \leq e\right\}.$$

Lösning: Vi använder divergenssatsen och noterar att

$$\operatorname{div} u = 3.$$

Låt N vara den utåtriktade normalen till K, då gäller att

$$\iint_{\partial K} u \cdot N\, dS = \iiint_K 3\, dxdydz.$$

Låt oss införa de nya variablerna $u = x,\ v = \sqrt{2}y$ och $w = z$. Då gäller

$$dxdydz = \left|\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\right| dudvdw = \frac{1}{\sqrt{2}}\, dudvdw$$

och

$$
\begin{aligned}
\iiint_K 3\, dxdydz &= \frac{3}{\sqrt{2}} \iiint_{u^2+v^2 \leq \ln w \leq 1} dudvdw \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}} \int_1^e \left(\iint_{u^2+v^2 \leq \ln w} dudv\right) dw \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}} \int_1^e \pi \ln w\, dw \\
&= \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \Big[w \ln w - w\Big]_1^e \\
&= \frac{3\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

8. Bestäm det minsta avståndet från ellipsoiden $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ till planet $x + y + z = 6$.

Lösning: Bilda $F(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Ellipsoiden är då nivåytan $F(x,y,z) = 0$. Gradienten ∇F pekar alltså ortogonalt mot tangentplanet till F i varje punkt (x,y,z) som uppfyller $F(x, y, z) = 0$. Speciellt gäller att det minsta avståndet från ellipsoiden till planet måste gå i riktningen som är gradienten ∇F och planets normal $(1, 1, 1)$. Alltså gäller att

$$\nabla F = \lambda(1, 1, 1),$$

vilket är detsamma som

$$8x = \lambda,\ 2y = \lambda,\ 2z = \lambda.$$

Alltså är $4x = y = z$, som insatt i ellipsoiden blir

$$4x^2 + (4x)^2 + (4x)^2 = 4$$

eller

$$9x^2 = 1.$$

Alltså är $(x, y, z) = \pm(1/3, 4/3, 4/3)$. Dessa punkter är kandidater till att ha minsta avståndet till det givna planet.

Vi börjar med $(1/3, 4/3, 4/3)$. Genom att börja i denna punkt och lägga till a mycket av vektorn $(1, 1, 1)$ så vill vi hamna i planet. Vi får

$$(1/3, 4/3, 4/3) + a(1, 1, 1) = (a + 1/3, a + 4/3, a + 4/3)$$

som ligger i planet om

$$3a + 3 = 6,$$

d.v.s. om $a = 1$. Avståndet är alltså längden av vektorn $|(1, 1, 1)| = \sqrt{3}$.

Nu till den andra punkten, $-(1/3, 4/3, 4/3)$. Vi får

$$(-1/3, -4/3, -4/3) + a(1, 1, 1) = (a - 1/3, a - 4/3, a - 4/3)$$

som ligger i planet om

$$3a - 3 = 6,$$

d.v.s. om $a = 3$. Avståndet är alltså längden av vektorn $|3(1, 1, 1)| = 3\sqrt{3}$.

Kortaste avståndet är därmed $\sqrt{3}$.

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!