



Tentamen i kursen SF1674 Flervariabelanalys

Datum: 2022-03-18

Skrivtid: 8:00 – 13:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper och penna

Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	28	25	22	19	16

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar introduceras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Låt $f(x, y, z) = xy + e^{yz} + z$.

(a) Bestäm derivatan av f i punkten $(3, 1, 0)$ längs enhetsvektorn $v = (a, b, c)$.

(b) Hur ska v väljas för att derivatan skall bli så stor som möjligt?

2. Finn alla lokala max- och minpunkter till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3 \ln(1 + xy),$$

då $x > 0$ och $y > 0$.

3. Lös den partiella differentialekvationen

$$\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad x > 0, y > 0,$$

som uppfyller att $f(u, u) = 2u^2$, genom att införa de nya variablerna $s = x^2 + y^2$ och $t = x^2 - y^2$.

4. Beräkna

$$\iint_Q xy \, dx \, dy$$

där

$$Q = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y - x \leq 1, y \geq 0\}$$

5. Bestäm kurvintegralen

$$\int_{\gamma} u \cdot dr,$$

där $u(x, y) = (-xy, x^2 - y^2)$ och kurvan γ är den del av ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$ som ligger i första kvadranten orienterat moturs.

6. (a) Definiera vad som menas med att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i en punkt $a \in \mathbb{R}^2$.
(b) Visa genom användning av definitionen att $f(x, y) = x^2y$ är differentierbar i punkten $(1, 1)$. Det är alltså inte möjligt att argumentera att f är av klass C^1 och därmed differentierbar.

7. Beräkna flödet av vektorfältet $u(x, y, z) = (x + e^y, 1, 2z + \sin x)$ ut genom det begränsade området

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2+2y^2} \leq z \leq e \right\}.$$

8. Bestäm det minsta avståndet från ellipsoiden $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ till planet $x + y + z = 6$.

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!