

Tentamen i SF1674 Flervariabelanalys

10 juni 2021, kl 14:00-19:00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng. För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 2y^3 + x^4}{x^2 + 2y^2} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{då } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a). Avgör om funktionen f är kontinuerlig i punkten $(0, 0)$;

(b). Avgör om f är partiellt deriverbar i punkten $(0, 0)$; beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ om de finns.

(c). Avgör om funktionen f är differentierbar i $(0, 0)$.

2. Bestäm alla punkter P på kurvan $x = y^2$ sådana att kurvans normallinje i P går genom punkten $(2, -1)$.

3. Avgör om funktionen

$$f(x, y, z) = 2 + 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 6xz - 2yz$$

har en lokal maximipunkt

(a). i punkten $(0, 0, 0)$;

(b). i punkten $(1, 1, 1)$.

4. Transformera differentialekvationen

$$2x \frac{\partial f}{\partial x} - 3y \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad x > 0, y > 0,$$

genom att införa variablerna $u = xy$ och $v = x^3y^2$ och finn alla lösningar av klass $\mathcal{C}^1$.

5. Bestäm ett (eventuellt) största värde av funktionen

$$f(x, y) = (x^2 + y)e^{-x-y}$$

i området $0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty$.

6. Använd en lämplig variabelsubstitution för att beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{1}{2x - y + 1} dx dy$$

där D är det område som definieras av olikheterna $1 \leq x + 2y \leq 2x - y \leq 2$.

7. Visa (med hjälp av en lämplig sats) att ekvationen

$$x^2 + 2xz + y^3 - yz + z^4 = 4$$

i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ definierar en $\mathcal{C}^1$ -funktion $z = z(x, y)$.

I vilken riktning från punkten $(1, 1)$ växer $z(x, y)$ snabbast?

8. Låt K vara kroppen som beskrivs av olikheterna $x^2 + y^2 \leq z$, $x^2 + y^2 + z \leq 2$. Massan av kroppen har en variabel densitet $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Beräkna den totala massan.

9. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F}(x, y) = (x^5 + 3y, 2x - e^{y^3})$ och γ är ellipsen $9(x - 1)^2 + 4(y - 5)^2 = 1$ genomlöst moturs.

10. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS,$$

där vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F} = (2x + x^2z + y^2z^2 + ye^{z^2}, x^2z^2 + xe^{z^2} + y - y^2z, e^{y-x^2} - xz^2 + yz^2),$$

och D är halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \leq x$, som är orienterad med normalen pekande bort från origo.