# Lösningsförslag till tentamen i SF1674 Flervariabelanalys
# 10 juni 2021

**1.** Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3+2y^3+x^4}{x^2+2y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a). Avgör om funktionen $f$ är kontinuerlig i punkten $(0,0)$.
(b). Avgör om $f$ är partielt deriverbar i punkten $(0,0)$; beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ om de finns.
(c). Avgör om funktionen $f$ är differentierbar i $(0,0)$;

*Lösning:* $(a)$ Vi uppskattar $|f|$ för $(x,y) \neq (0,0)$ i termer av polära koordinater $x = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$:

$$\begin{aligned} |f(x,y)| = &\left| \frac{r^3(2\cos^3\theta + 2\sin^3\theta + r\cos^4\theta)}{r^2(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)} \right| \leq r \left| \frac{2\cos^3\theta + 2\sin^3\theta + r\cos^4\theta}{2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \right| \\ &= r|2\cos^3\theta + 2\sin^3\theta + r\cos^4\theta|/2 \leq r(4+r)/2. \end{aligned}$$

Den sista funktionen går mot 0 då $r \to 0$. Enligt jämförelsesatsen innebär detta att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Eftersom $f(0,0) = 0$, är $f$ kontinuerlig i $(0,0)$.
$(b)$ Enligt definition, $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^3+h^4}{h^2} \cdot \frac{1}{h} = 2$. På liknande sätt beräknas $f'_y(0,0) = 1$.
$(c)$ Låt

$$\rho(h,k) := f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

$f$ är differentierbar i origo om och endast om vi har $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k)/(h^2+k^2)^{1/2} = 0$. Beräknar:

$$\begin{aligned} R(h,k) :=& \rho(h,k)(h^2+k^2)^{1/2} = (f(h,k) - f(0,0) - 2h - k)/(h^2+k^2)^{1/2} \\ =& \frac{2h^3 + 2k^3 + h^4 - (2h+k)(h^2+2k^2)}{(h^2+2k^2)\sqrt{h^2+k^2}}. \end{aligned}$$

Vi ser att $\lim_{(h,k)\to(0,0)} R(h,k) \neq 0$ eftersom, t.ex., $R(h,h) = (-5h^3+h^4)/(3\sqrt{2}|h|^3) \to -5/3\sqrt{2}$ då $h \to 0^+$. Alltså är inte $f$ differentierbar i origo.

**2.** Bestäm alla punkter $P$ på kurvan $x = y^2$ sådana att kurvans normallinje i $P$ går genom punkten $(2,-1)$.

*Lösning:* Kurvan $x = y^2$ är en nivåkurva till $F(x,y) = x - y^2$, så dess normallinje $N$ i punkten $P = (a,b)$ på kurvan har riktningsvektorn grad$F(a,b) = (1,-2b)$. Kravet att linjen $N$ ska gå genom punkten $(2,-1)$ är att dess riktningsvektor är parallell med den vektor som går mellan punkterna $(2,-1)$ och $(a,b)$, alltså att $(1,-2b)$ är parallel med $(a-2, b+1)$. Detta är ekvivalent med att

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a-2 \\ -2b & b+1 \end{pmatrix} = (b+1) + 2b(a-2) = 2ab - 3b + 1 = 0.$$

Vi sätter in villkoret $a = b^2$ och får ekvationen

$$0 = 2b^3 - 3b + 1 = (b-1)(2b^2 + 2b - 1).$$

Denna har rötter $b = 1$ och $b_\pm = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$. Villkoret $a = b^2$ ger punkterna:
$(1,1)$, $(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2})$.

**3.** Avgör om funktionen

$$f(x,y,z) = 2 + 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 6xz - 2yz$$

har en lokal maximipunkt

(a). I punkten $(0,0,0)$;

(b). I punkten $(1,1,1)$.

*Lösning:* $(a)$. Eftersom $f$ är ett polynom, sammanfaller $f$ med dess Taylorpolynom i origo. Vi ser att alla första ordningens partiella derivator är 0, alltså är origo en stationär punkt. Den kvadratiska formen är

$$Q(x,y) = 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 6xz - 2yz = 2\left((x - y/2 + 3z/2)^2 + (y/2 + z/2)^2 - z^2/2\right).$$

Denna är indefinit, och origo är en sadelpunkt för $f$ (ej maximum).

$(b)$. Vi har: $\partial f/\partial x = 4x - 2y + 6z$, och $\partial f/\partial x(1,1,1) = 8 \neq 0$. Eftersom $f$ är differentierbar och inte alla partiella derivator i punkten $(1,1,1)$ är 0, så är inte denna punkt en maximipunkt.

**4.** Transformera differentialekvationen $2x\frac{\partial f}{\partial x} - 3y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $x > 0$, $y > 0$, genom att införa variablerna $u = xy$ och $v = x^3y^2$ och finn alla lösningar av klass $\mathcal{C}^1$.

*Lösning:* Först beräknar vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + 3x^2y^2\frac{\partial f}{\partial v},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial} + 2x^3y\frac{\partial f}{\partial}.\end{aligned}$$

Insättning i differentialekvationen ger:

$$\begin{aligned}0 &= 2x\frac{\partial f}{\partial x} - 3y\frac{\partial f}{\partial y}\\ &= 2x\left(y\frac{\partial f}{\partial u} + 3x^2y^2\frac{\partial f}{\partial v}\right) - 3y\left(x\frac{\partial f}{\partial} + 2x^3y\frac{\partial f}{\partial}\right) = -xy\frac{\partial f}{\partial u} = -u\frac{\partial f}{\partial u}.\end{aligned}$$

Eftersom $u > 0$, är detta ekvivalent med $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$. Alla $C^1$-lösningar till denna ekvation beskrivs av $f(u,v) = g(v)$ där $g \in C^1$ är godtycklig, och i de ursprungliga koordinaterna har vi $f(x,y) = g(x^3y^2)$.

**5.** Bestäm det största värdet av funktionen

$$f(x,y) = (x^2 + y)e^{-x-y}$$

i området $0 \le x < \infty,\ 0 \le y < \infty$.

*Lösning:* Vi märker att $f(x,y) \geq 0$ i hela området och $f(x,y) = 0$ på randen (dvs på de positiva halvaxlarna). För att studera gränsvärdet av $f(x,y)$ då $|(x,y)| \to \infty$, går vi över till polära koordinater. Observera att $\theta \in [0, \pi/2]$, och för sådana $\theta$ har vi: $\sin\theta + \cos\theta \geq \sqrt{2}/2 > 1/2$. Vi har:

$$f(x,y) = (x^2 + y)e^{-x-y} = (r^2\cos^2\theta + r\sin\theta)e^{-r(\sin\theta+\cos\theta)} \leq (r^2 + r)e^{-r/2}.$$

Den sista funktionen går mot 0 då $r \to \infty$. Eftersom $f(x,y) \geq 0$ i hela området, medför instängningssatsen att $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = 0$. Detta medför att för varje $\epsilon > 0$ (som vi kommer att välja senare) finns $R(\epsilon)$ sådan att för alla $(x,y)$ i vårt område sådana att $|(x,y)| \geq R$ får vi att $f(x,y) < \epsilon$. Betrakta kompakten $K = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0, |(x,y)| \leq R\}$. Eftersom funktionen är kontinuerlig (och deriverbar inne i $K$), så antar $f$ ett största värde över $K$ antingen i en stationär punkt eller på randen.

Söker stationära punkter av $f$:

$$f'_x = (2x - x^2 - y)e^{-x-y} = 0, \quad f'_y = (1 - x^2 - y)e^{-x-y} = 0$$

är ekvivalent med $(x,y) = (1/2, 3/4)$. I denna punkt har vi $f(1/2, 3/4) = e^{-5/4}$.

Undersöker randkomponenter:

- För $x^2 + y^2 = R$ har vi $f(x,y) < \epsilon$.

- För $x = 0$, $y \in [0,R]$, beteckna $f_1(y) := f(0,y) = ye^{-y}$. $f_1' = (1-y)e^{-y} = 0$ ger $y = 1$; $f_1(1) = e^{-1}$, $f_1(0) = 0$, $f_1(R) < \epsilon$.

- För $y = 0$, $x \in [0,R]$, beteckna $f_2(x) := f(0,y) = x^2e^{-y}$. $f_2' = (2x - x^2)e^{-x} = 0$ ger $x = 2$; $f_2(2) = 4e^{-2}$, $f_2(0) = 0$, $f_2(R) < \epsilon$.

Vi fixerar $\epsilon = 0.01$ och tar motsvarande kompakt $K$. Jämför de ”intressanta”värden: den största är $4e^{-2} = f_2(2) = f(2,0)$. Detta är det största värdet av $f$ över kompaktet $K$; men även i hela området eftersom utanför $K$ har vi $f(x,y) < 0.01 < 4e^{-2}$.

*Svar:* Det största värdet är $4e^{-2}$.

**6.** Använd en lämplig variabelsubstitution för att beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{1}{2x - y + 1} dxdy$$

där $D$ är det område som definieras av olikheterna $1 \leq x + 2y \leq 2x - y \leq 2$.

*Lösning:* En lämplig variabelsubstitution är $u = x + 2y$, $v = 2x - y$. Funktionaldeterminanten är $d(u,v)/d(x,y) = -5$; Efter variabelbytet blir den givna integralen

$$\iint_E \frac{1}{v+1}\frac{1}{5} dxdy$$

där $E$ definieras av olikheterna $1 \leq u \leq v \leq 2$. $E$ är en triangel.

Itererad integration ger:

$$\frac{1}{5}\iint_E \frac{1}{v+1} dudv = \frac{1}{5}\int_1^2 (\int_1^v \frac{1}{v+1} du) dv =$$

$$\frac{1}{5}\int_1^2 \frac{v-1}{v+1} dv = \frac{1}{5}[v - 2\ln(v+1)]_1^2 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\ln(3/2).$$

**7.** Visa (med hjälp av en lämplig sats) att ekvationen

$$x^2 + 2xz + y^3 - yz + z^4 = 4$$

i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $z = z(x, y)$.

I vilken riktning från punkten $(1, 1)$ växer $z(x, y)$ snabbast?

*Lösning:* Sätt $F(x, y, z) = x^2+2xz+y^3-yz+z^4-4$. Då $F'_z = 2x-y+4z^3$. Eftersom $F \in C^1(\mathbb{R})$ (polynom) och $F'_z(1, 1, 1) = 5 \neq 0$, så följer det av implicita funktionssatsen att $F(x, y, z) = 0$ i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $z = z(x, y)$.

Vi vet att $z(x, y)$ växet snabbast när $(x, y)$ ändras i gradientens riktning. För att bestämma gradienten, deriverar vi uttrycket $F(x, y, z(x, y)) = 0$ partiellt m.a.p. $x$ och $y$, Vi får:

$$F'_x = 2x + 2z + 2xz'_x - yz'_x + 4z^3z'_x, \quad F'_y = 2xz'_y + 3y^2 - z - yz'_y + 4z^3z'_y,$$

och använder att båda dessa derivator är 0 i punkten $(x, y) = (1, 1)$ samt att $z(1, 1) = 1$:

$$F'_x(1, 1) = 2 + 2 + 2z'_x - z'_x + 4z'_x = 0, \quad F'_y = 2z'_y + 3 - 1 - z'_y + 4z'_y = 0,$$

vilket ger:

$$z'_x(1, 1) = -4/5, \quad z'_y(1, 1) = -2/5.$$

Alltså, $z(x, y)$ växer snabbast i punkten $(1, 1)$ i riktningen $(-4/5, -2/5)$.

**8.** Låt $K$ vara kroppen som beskrivs av $x^2 + y^2 \leq z$, $x^2 + y^2 + z \leq 2$. Massan av kroppen har en variabel densitet $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Beräkna den totala massan.

*Lösning:* Kroppen $K$ begränsas av två paraboloider: $z = x^2 + y^2$ (nedåt) och $z = 2 - (x^2 + y^2)$ (uppåt). På skärningskurvan har vi $x^2 + y^2 = 2 - (x^2 + y^2)$, dvs, $x^2 + y^2 = 1$. Alltså ges projektionen av $K$ på $xy$-planet av disken $D = \{x, y \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Massan har uttrycket $M = \iiint_K \rho(x, y, z)\, dxdydz$. Vi har alltså:

$$\begin{aligned} M = &\iint_D (\int_{x^2+y^2}^{2-(x^2+y^2)} x^2 + y^2\, dz)dxdy = \iint_D (2 - 2(x^2 + y^2))(x^2 + y^2)\, dxdy \\ =&2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)r^2\, r\, drd\theta = \pi/3. \end{aligned}$$

**9.** Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma F \cdot dr$$

där vektorfältet **F** ges av $\mathbf{F}(x, y) = (x^5+3y, 2x-e^{y^3})$ och $\gamma$ är ellipsen $9(x-1)^2+4(y-5)^2 = 1$ genomlöpt moturs.

*Lösning:* Eftersom vektorfältet $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ är $\mathcal{C}^1$ i hela $\mathbb{R}^2$, och kurvan $\gamma$ är $C^1$, kan vi använda Greens sats. Vi har: $\frac{\partial P}{\partial y} = 3$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$, området innesluten av $\gamma$ är en ellips $E$, och

$$\int_\gamma F \cdot dr = \iint_E \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\iint_E dxdy = -\text{area av E}.$$

Arean av $E$ =arean en 'skiftad"ellips $E'$ som ges av $9u^2 + 4v^2 = 1$ (detta kan man verifiera genom att göra ett koordinatbyte $u = x - 1$, $v = y - 5$.) Arean av $E'$ beräknas enkelt i polära koordinater. Svar:

$$\int_\gamma F \cdot dr = -\frac{\pi}{6}.$$

**10.** Beräkna flödesintegralen

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS,$$

där vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F} = (2x + x^2 z + y^2 z^2 + ye^{z^2},\ x^2 z^2 + xe^{z^2} + y - y^2 z,\ e^{y-x^2} - xz^2 + yz^2),$$

och $D$ är halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \leq x$, som är orienterad med normalen pekande bort från origo.

*Lösning:* Låt $B$ vara den del av planet $x - y = 0$ som ligger innanför sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orienterad med normalen som har samma riktning som $(-1, 1, 0)$. Då är unionen $D \cup B$ en sluten yta med utåtpekande normal. Observera att vektorfältet är $C^1$ på hela $\mathbb{R}^3$; ytan är styckvis $C^1$. Vi kan använda Gauss sats: Låt $K$ vara den kropp som begränsas av ytan $D \cup B$. Då

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_B \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K \operatorname{div}\ \mathbf{F}\, dxdydz.$$

Vi beräknar: div $\mathbf{F} = 3$, och den sista integralen är

$$\iiint_K \operatorname{div}\ \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_K 3\, dxdydz = 3(\text{Volym av ett halvklot}) = 3\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = 2\pi.$$

Vi parametriserar nu $B$ med $x$ och $z$ som parametrar. Då $\mathbf{r} = (x, y, z) = (x, x, z)$; parameterområdet ges av $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 = 2x^2 + z^2$. Vidare, $\mathbf{r}'_x = (1, 1, 0)$, $\mathbf{r}'_z = (0, 0, 1)$. Normalen ges av

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 0) := N.$$

For att få det valda orienteringen måste vi använda $-N$ som normal. Vi får då $dS = (-1, 1, 0)dxdz$, och

$$\iint_B \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_B \mathbf{F}(\mathbf{r}(x, z)) \cdot (-1, 1, 0) dxdz =$$

$$\iint_B (2x + x^2 z + x^2 z^2 + xe^{z^2},\ x^2 z^2 + xe^{z^2} + x - x^2 z,\ e^{x-x^2} - xz^2 + xz^2) \cdot (-1, 1, 0) dxdz =$$

$$-\iint_B (x + 2x^2 z)\, dxdz = 0$$

av symmetriskäl. Den sökta integralen är därför $2\pi - 0 = 2\pi$.