

Tentamen SF1674 Flervariabelanalys

Fredag 19 mars 2021, kl 14:00-19:00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng. För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Används satser ska man verifiera att alla villkoren är uppfyllda. **Lycka till!**

1. För vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ existerar gränsvärdet

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2)^\alpha} ?$$

Beräkna gränsvärdet för dessa α .

2. Avgör om planet $x + 2y + z = -2$ är ett tangentplan till ytan

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

3. Bestäm alla C^2 -lösningar till ekvationen

$$y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad x \neq 0,$$

genom att införa de nya variablerna

$$u = x, \quad v = xy.$$

4. Visa att ekvationen

$$3y^2 - 3yz + 2x^3 + z^3 = 19$$

i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (1, 2, -1)$ definierar en C^1 -funktion $z = z(x, y)$. Beräkna $z'_x(1, 2)$, $z'_y(1, 2)$.

5. Beräkna

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x+2y)^2 - (2y)^2} dx dy.$$

6. Bestäm största och minsta värden av funktionen $f(s, t) = 2s^2 - 4s + t^2 + 2t$ på området $2s^2 + t^2 \leq 12$.

7. Beräkna volymen av den kropp K som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq 4x, \quad |z| \leq x^2 + y^2.$$

8. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} (x^4 + 3y^2x^2)dx + (y^3 + 2yx^3 + e^{\pi\sqrt{y^2+1}})dy$$

där $\gamma(t) = (\cos(t), 1 - e^{\sin(t)})$ för $t \in [\pi, 2\pi]$.

Tips: du kan använda Greens sats eller teorin för potentialfält.

9. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS,$$

där vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, x^3y^3)$, ytan Y ges av $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$, $z \geq 0$, och enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ till Y är riktad bort från punkten $(0, 0, 1)$.

10 a). Ge ett exempel på en $\mathcal{C}^1$ -funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ som har ett lokalt minimum i origo, men som saknar globalt minimum.

b). Har vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}})$ en potential definierad för alla $(x, y) \neq 0$?