Lösningsförslag till tentamen i SF1674 Flervariabelanalys 19 mars 2021

1. Undersök gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

för alla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösning: Först betrakta gränsvärdet längs x-axeln (dvs linjen $y=0$:)

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^{2\alpha}} = \lim_{x\to 0} x^{3-2\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha \le 3/2 \\ \infty, & \alpha > 3/2. \end{cases}$$

Detta ger att det ursprungliga gränsvärdet saknas för alla $\alpha > 3/2$.

Låt $\alpha < 3/2$. I polära koordinater

$$\frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{r^3(\cos^3 t + \sin^3 t)}{r^{2\alpha}} = r^{3-2\alpha}(\cos^3 t + \sin^3 t) := f(r,t).$$

Eftersom $|f(r,t)| \le 2r^{3-2\alpha}$, och $\lim_{r\to 0} r^{3-2\alpha} = 0$ för alla $\alpha < 3/2$, så konvergerar den ursprungliga funktionen till 0 enligt jämförelsesatsen.

Betrakta $\alpha = 3/2$. I polära koordinater får vi

$$\frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{r^3(\cos^3 t + \sin^3 t)}{r^3} = (\cos^3 t + \sin^3 t).$$

Detta har inget gränsvärde då $r \to 0$.

Svar: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^\alpha} = 0$ för $\alpha < 3/2$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}$ existerar inte för $\alpha \ge 3/2$.

2. Avgör om planet $x + 2y + z = -2$ är ett tangentplan till ytan

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Lösning: Det givna planet tangerar ytan i en punkt (x,y,z) om och endast om punkten tillhör både ytan och planet, samt normalen till ytan i denna punkt är parallel med normalen till planet, dvs för något $\lambda \in \mathbb{R}$ gäller

$$(2x, 2y, -2z) = \lambda(1,2,1).$$

Detta ger ekvationerna

$$2x = \lambda, \quad 2y = 2\lambda, \quad -2z = \lambda,$$

vilket ger $2x = y = -2z$. Insättning av detta villkor i ytans ekvation ger

$$x^2 + (2x)^2 - (-x)^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{2}.$$

Normalen till ytan är alltså parallel med normalen till planet i punkterna $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$.

Verifierar om dessa punkter tillhör planet. Sätter in $(x,y,z) = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ i planets ekvation:

$$\frac{1}{2} + 2\cdot 1 - \frac{1}{2} = 2 \ne -2$$

Sätter in $(x, y, z) = (-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$ i planets ekvation:

$$-\frac{1}{2} - 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} = -2.$$

Vi ser att punkten $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ uppfyller både ytans och planets ekvation, samt de två normalerna i denna punkt är parallella, alltså planet tangerar ytan i denna punkt.

3. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar till ekvationen

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad x \neq 0,$$

genom att införa de nya variablerna

$$u = x, \quad v = xy.$$

Lösning: Enligt kedjeregeln,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial v};$$

Eftersom vi söker $f \in \mathcal{C}^2$, och variabelbytet är av klass $\mathcal{C}^2$, har vi $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$, och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} + x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial v} + x\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Insättningen i ekvationen ger $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = 0$. Eftersom $x \neq 0$ (se antagandet), så har vår ekvation samma $\mathcal{C}^2$-lösningar som

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = 0.$$

Löser denna:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial f}{\partial v} = g(v) \;\Leftrightarrow\; f = G(v) + H(u)$$

där G och H är godtyckliga $\mathcal{C}^2$-funktioner.

4. Visa att ekvationen

$$3y^2 - 3yz + 2x^3 + z^3 = 19$$

i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (1, 2, -1)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $z = z(x, y)$. Beräkna $z'_x(1, 2)$, $z'_y(1, 2)$.

Lösning: Efterfom funktionen $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, $f(1, 2, -1) = 19$ och $f'_z(1, 2, -1) = -3 \neq 0$, medför Implicita funktionssatsen att det finns en $\mathcal{C}^1$-funktion $z = z(x, y)$ sådan att ytan $f(x, y, z) = 19$ i en omgivning av punkten $(1, 2, -1)$ ges som graf av denna funktion.

Med andra ord, finns det en omgivning U av punkten $(1,2)$ sådan att för alla $(x,y) \in U$ har vi $f(x,y,z(x,y)) = 19$. Genom att derivera denna ekvation implicit map x får vi för alla $(x,y) \in U$:

$$f'_x(x,y,z(x,y)) + f'_z(x,y,z(x,y))\, z'_x(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; 6x^2 + 3z^2(x,y)\, z'_x(x,y) = 0.$$

Speciellt, för $(x,y,z(x,y)) = (1,2,-1)$, har vi

$$z'_x(1,2) = -\frac{6}{-3} = 2.$$

På samma sätt får man

$$z'_y(1,2) = -\frac{15}{-3} = 5.$$

5. Beräkna

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x+2y)^2-(2y)^2}\, dxdy.$$

Lösning: Integralen är generaliserad (oändligt integrationsområde). Integranden är positiv, så vi kan använda variabelbyte och upprepad integration. Låt oss göra koordinatbytet

$$u = x + 2y, \quad v = 2y.$$

Då har vi: $dudv = \frac{d(u,v)}{d(x,y)}\, dxdy = 2\, dxdy$, det nya området är $\mathbb{R}^2$, och integralen blir

$$I := \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x+2y)^2-(2y)^2}\, dxdy = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+v^2)}\, dudv.$$

Efter ett polärt koordinatbyte får vi:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-r^2} r\, drd\theta = \pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \pi/2.$$

6. Bestäm största och minsta värden av funktionen $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 2y$ på området D som ges av $2x^2 + y^2 \le 12$.

Lösning: Områdets rand är en ellips $2x^2 + y^2 = 12$. Området D är kompakt (slutet och begränsat), funktionen f är kontinuerlig på det. Därför antar f både sitt största och minsta värde över D. Eftersom $f \in \mathcal{C}^1(\operatorname{int} D)$, så antas max. och min. antingen i de stationära punkterna eller på randen.

Söker de stationära punkterna: $\operatorname{grad} f = (4x-4, 2y+2)$. Den enda stationära punkten är $(1,-1)$. Denna punkt ligger inuti området eftersom $2\cdot 1^2 + (-1)^2 = 3 < 12$; $f(1,-1) = -3$.

Beteckna $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 12$; områdets rand ges av $g(x,y) = 0$. På randen antas max. och minimum i Lagrange punkter, dvs punkterna på randen där $\operatorname{grad} f$ är parallel med $\operatorname{grad} g$:

$$\begin{cases} 4x - 4 = \lambda 4x, \\ 2y + 2 = \lambda 2y, \\ 2x^2 + y^2 = 12. \end{cases}$$

Första två ekvationer ger $\lambda = 1 - \frac{4}{4x} = 1 + \frac{2}{2y}$, dvs $x = -y$; insättningen i den tredje ger: $3x^2 = 12$, dvs $x = \pm 2$. Vi får två Lagrange punkter: $(2, -2)$ och $(-2, 2)$.

Vi beräknar $f(2, -2) = 0$ och $f(-2, 2) = 24$.

Jämförelse av värden i de ”intressanta” punkterna ger: minsta värdet är $f(1, -1) = -3$, största värdet är $f(-2, 2) = 24$.

7. Beräkna volymen av den kropp K som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq 4x, \quad |z| \leq x^2 + y^2.$$

Lösning: Observera att $x^2 + y^2 \leq 4x$ kan skrivas om som $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$. I $\mathbb{R}^3$ definierar $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$ en ifylld rak cirkulär cylinder. Kroppen K ligger alltså inom cylindern och begränsas av två hyperboloider: $z = x^2 + y^2$ uppåt, och $z = -(x^2 + y^2)$ nedåt. Beteckna $D := \{(x, y) \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$. Av symmetrin, är volymen av K lika med $2V$ där

$$V = \iint_D x^2 + y^2 \, dxdy.$$

Inför polära koordinater: $x - 2 = r\cos\theta$, $r = r\sin\theta$; då har vi $x - 2 = r\cos\theta$, $dxdy = r\,drd\theta$, disken D ges av $r \leq 2$, och

$$\begin{aligned} V = \iint_D x^2 + y^2 \, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 ((2 + r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2) r\, drd\theta = \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + 4r\cos\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) r\, drd\theta = 24. \end{aligned}$$

Slutligen, $\mathrm{vol}(K) = 2V = 48\pi$.

8. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (x^4 + 3y^2x^2)dx + (y^3 + 2yx^3 + e^{\pi\sqrt{y^2+1}})dy$$

där $\gamma(t) = (\cos(t), 1 - e^{\sin(t)})$ för $t \in [\pi, 2\pi]$.

Tips: du kan använda Greens sats eller teorin för potentialfält.

Lösning: Låt $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y))$, $P = x^4 + 3y^2x^2$, $Q = y^3 + 2yx^3 + e^{\pi\sqrt{y^2+1}}$. Observera att $P, Q \in \mathcal{C}^1$, området $\mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhängande, och

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 6yx^2 - 6yx^2 = 0,$$

altså är vektorfältet $\mathbf{F}$ konservativt (har en potential). Det medför att integralen $\int_\gamma \mathbf{F}\, dr$ oberoende av vägen. Man får därför samma värde om man integrerar längs en annan kurva med samma ändpunkter.

Vi ser att $\gamma(\pi) = (-1, 0)$, och $\gamma(2\pi) = (1, 0)$. Låt $\gamma' = (t, 0)$ för $t \in [-1, 1]$. Då har γ' samma ändpunkter som γ, och vi har

$$\int_\gamma \mathbf{F}\, dr = \int_{\gamma'} \mathbf{F}\, dr = \int_{-1}^{1} t^4\, dt = \frac{2}{5}.$$

9. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS,$$

där vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, x^3y^3)$, ytan Y ges av $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$, $z \geq 0$, och enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ till Y är riktad bort från punkten $(0, 0, 1)$.

Lösning 1 : Parametrisera ytan Y med parametrar (θ, ϕ), $\theta \in [0, 2\pi/3]$, $\phi \in [0, 2\pi]$: $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (x, y, z)$, där

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta\cos\phi \\ y = 2\sin\theta\sin\phi \\ z = 1 + 2\cos\theta. \end{cases}$$

Då $\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\theta, \phi)\right) = 8\sin^3\theta(\cos\phi\sin^2\phi, \cos^2\phi\sin\phi, 8\sin^3\theta\ \cos^3\phi\sin^3\phi\big)$;

Normalen beräknas: $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = 4(\sin^2\theta\cos\phi, \sin^2\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\theta)$.

Vi får

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\theta d\phi =$$
$$2^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi/3} \left(2\sin^5\theta\cos^2\phi\sin^2\phi + 8\sin\theta\cos\theta(\cos\phi\sin\phi)^3\right)\, d\theta d\phi.$$

Det andra uttrycket integreras till 0 (ty $\int_0^{2\pi}(\cos\phi\sin\phi)^3 d\phi = 0$ pga symmetrin). Vi beräknar:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\phi\sin^2\phi d\phi = \pi/4, \quad \int_0^{2\pi/3} \sin^5\theta\, d\theta = \frac{153}{160},$$

och slutligen

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = 2^6 \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\sin^2\phi\, d\phi \cdot \int_0^{2\pi/3} \sin^5\theta\, d\theta = 2^6 \frac{\pi}{4}\frac{153}{160} = \frac{153\pi}{10}.$$

Lösning 2 (lite längre): Låt K vara kroppen som ges av $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 4$, $z \geq 0$. Dess rand består av två komponenter: ytan Y och disken $Y_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 3, z = 0\}$. Låt $\widehat{\mathbf{N}}_1$ vara enhetsnormalen till Y_1 riktad nedåt. Eftersom $\mathbf{F}$ är $\mathcal{C}^1$ i en omgivning av K, kan vi använda divergenssatsen:

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot\ dV - \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}_1\, dS.$$

Vi har: $\operatorname{div} \mathbf{F} = y^2 + x^2$.

Vi inför (skiftade) sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = 1 + r\cos\theta. \end{cases}$$

Då får vi $dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi$;

Kroppen är unionen av två delar. Den ena beskrivs enkelt i de sfäriska koordinaterna

$$K_1 = \{(r,\theta,\phi) \mid r \in [0,2],\ \theta \in [0, 2\pi/3],\ \phi \in [0, 2\pi]\},$$

Här har vi div $\mathbf{F} = y^2 + x^2 = r^2\sin^2\theta$.

Den andra är en konformat område K_2 med disken $\{x^2+y^2 \le \sqrt{3}, z = 0\}$ i basen och spetsen i punkten $(0,0,1)$.

Först beräknar integralen av divergensen över K_1. Här

$$\begin{aligned} \iiint_{K_1} \operatorname{div}\mathbf{F}\cdot\, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/3}\int_0^2 r^2\sin^2\theta\, r^2\sin\theta\, d\phi d\theta dr \\ &= 2\pi\int_0^2 r^4\, dr \int_0^{2\pi/3}\sin^3\theta\, d\theta = 2\pi\frac{2^5}{5}\int_0^{2\pi/3}\sin^3\theta. \end{aligned}$$

Vi beräknar den sista integralen mha substitution: $t = \cos\theta$, $dt = -\sin\theta$, $\theta = 0 \Leftrightarrow t = 1$, $\theta = 2\pi/3 \Leftrightarrow t = -\cos\pi/3 = -1/2$

$$\int_0^{2\pi/3}\sin^3\theta\, d\theta = -\int_1^{-1/2}(1-t^2)\, dt = \int_{-1/2}^1 (1-t^2)\, dt = \frac{3}{2} - (\frac{1}{3} + \frac{1}{24}) = \frac{9}{8}.$$

Alltså, $\iiint_{K_1} \operatorname{div}\mathbf{F}\cdot\, dV = 2\pi\frac{2^5}{5}\frac{9}{8} = \frac{72\pi}{5}$.

Integralen av divergensen över K_2 beräknas enklast mha cylindriska koordinater

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

där $r \in [0,\sqrt{3}]$, $z \in [0, (\sqrt{3}-r)/\sqrt{3}]$. Här har vi div $\mathbf{F} = y^2 + x^2 = r^2$, och

$$\begin{aligned} \iiint_{K_2} \operatorname{div}\mathbf{F}\cdot\, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{(\sqrt{3}-r)/\sqrt{3}} r^2\, r\, dz dr d\phi \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}-r)/\sqrt{3})\, r^3\, dr = \pi 9/10. \end{aligned}$$

På ytan Y_1 har vi: $\widehat{\mathbf{N}}_1 = (0,0,-1)$,

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}_1\, dS = \iint_{Y_1} (xy^2, x^2y, x^3y^3)\cdot(0,0,-1)\, dS = -\iint_{Y_1} x^3y^3\, dS = 0$$

(den sista likheten är enkel att få m.h.a. symmetri).

Slutligen får vi

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \frac{72\pi}{5} + \frac{9\pi}{10} - 0 = \frac{153\pi}{5}.$$

10. a). Ge ett exempel av en $\mathcal{C}^1$ funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ som har ett lokalt minimum i origo, men inget globalt minimum.
b). Har verkorfältet $\mathbf{F}(x,y) = (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}})$ en potential definierad för alla $(x,y) \neq 0$?

Lösning: **a).** Låt $f(x,y) = x^2+y^2-(x^2+y^2)^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Denna har ett lokalt minimum i origo. Nämligen, vi ser att origo är en stationär punkt, dvs grad$f(0,0) = (0,0)$ och den kvadratiska formen i origo är x^2+y^2, vilken är positivt definit.

Men funktionen har inget globalt minimum eftersom

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = \lim_{|(x,y)|\to\infty} (x^2+y^2)^2\,(-1+\frac{1}{x^2+y^2}) = -\infty.$$

Lösning: **b).** Låt C vara enhetscirkeln centrerad i origo. Den kan parametriseras som $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$. Då $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_C \mathbf{F}(x,y)\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)dt = -2\pi \neq 0.$$

Eftersom $\mathbf{F}(x,y)$ är inte oberoende av vägen i M, så har den ingen potential i M.