Tentamen

Torsdag 3 juni 2020 08:00-13:00
SF1674 Flervariabelanalys

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift ger maximalt 4 poäng. För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

(1) Betrakta funktionen $f(x, y) = e^{x-3y+1}$.
(a). Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i den punkt på ytan där $x = -1$, $y = 0$.
(b). Använd uträkningarna ovan för att bestämma ett närmevärde till $f(-9/10, 1/5)$.

Lösning: (a). I den givna punkten på ytan har vi $z = f(-1, 0) = 1$. De partialderivatorna av $f(x, y)$ är

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x-3y+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3e^{x-3y+1},$$

och därför har vi $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0) = -3$. Ekvationen för tangentplanet blir

$$z = 1 + (x + 1) - 3y,$$

vilket kan också skrivas som $x - 3y - z + 2 = 0$.

(b). Med hjälp av den linjära approximationen ovan, får vi att för (x, y) nära $(-1, 0)$ gäller att $f(x, y) \approx 1 + (x + 1) - 3y$. Speciellt för $x = -9/10$ och $y = 1/5$ har vi:

$$f(-\frac{9}{10}, \frac{1}{5}) \approx 1 + (-\frac{9}{10} + 1) - 3\frac{2}{10} = \frac{1}{2}.$$

(2) Låt

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a). Visa att f är kontinuerlig i origo; **2p.**
(b). Använd definitionen för att beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$; **1p.**
(c). Är f differentierbar i punkten $(0, 0)$? **1p.**

Lösning: (a). I polära koordinaterna får vi

$$f(x, y) = \frac{r^3 \cos^3\theta\, r^2 \sin^2\theta}{r^4} = r\cos^3\theta \sin^2\theta.$$

Alltså $|f(x, y)| \leq r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Det sista uttrycket går mot 0 då $(x, y) \to 0$; enligt instängningssatsen,

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

vilket innebär att f är kontinuerlig i origo.

(b). Enligt definitionen,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0;$$

på samma sätt $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c). För att undersöka om f är differentierbar i origo bildar vi kvoten

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - x f'_x(0,0) - y f'_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3 y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}.$$

Det sista yttrycket saknar gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$ eftersom den kan ha olika gränsvärden då (x,y) närmar sig origo längs olika linjer. Speciellt, längs linjen $x = 0$ är det sista uttrycket konstant 0, och längs linjen $x = y$ är samma uttryck konstant $2^{5/2}$.

(3) Antag att funktionen $f(u,v)$ är av klass C^2 och

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,2) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,2) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,2) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(0,2) = 1.$$

Vi inför de nya variablerna genom formeln $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Beräkna värdet av

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x^2 - y^2, 2xy)$$

i punkten $(x,y) = (1,1)$.

Lösning:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x^2-y^2, 2xy) = \partial_u f(x^2-y^2, 2xy)\, 2x + \partial_v f(x^2-y^2, 2xy)\, 2y;$$

Vi deriverar varje del separat:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\partial_u f(x^2-y^2, 2xy)\, 2x\right) =$$
$$\left(\partial_{uu} f(x^2-y^2, 2xy)\,(-2y) + \partial_{uv} f(x^2-y^2, 2xy)\, 2x\right)\, 2x;$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\partial_v f(x^2-y^2, 2xy)\, 2y\right) =$$
$$\left(\partial_{vu} f(x^2-y^2, 2xy)\,(-2y) + \partial_{vv} f(x^2-y^2, 2xy)\, 2x\right)\, 2y + \partial_v f(x^2-y^2, 2xy)\, 2;$$

Eftersom f har kontinuerliga derivator av ordning 2, har vi $\partial_{vu} f(x,y) = \partial_{uv} f(x,y)$ för alla (x,y), och

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x^2-y^2, 2xy) = -4xy \partial_{uu} f(x^2-y^2, 2xy) +$$
$$4(x^2-y^2)\partial_{uv} f(x^2-y^2, 2xy) + 4xy \partial_{vv} f(x^2-y^2, 2xy) + 2\partial_v f(x^2-y^2, 2xy).$$

Slutligen, för $(x, y) = (1, 1)$ får vi

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x^2 - y^2, 2xy) \mid_{(1,1)} = -4\partial_{uu} f(0, 2) + 4\partial_{vv} f(0, 2) +$$
$$2\partial_v f(0, 2) = -4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 0.$$

(4) Beräkna $\iint_D (x^2 - y^2)^{10} dxdy$, där området D beskrivs av $|x| + |y| \leq 1$.

Lösning: (Detta är Uppgift 6.19 från boken.) Observera att $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Inför de nya variablerna: $u = x - y$, $v = x + y$. I de nya variablerna beskrivs det givna området av:

$$\tilde{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \mid -1 \leq u \leq 1, \quad -1 \leq v \leq 1\},$$

och

$$x^2 - y^2 = -uv; \quad dudv = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dxdy = 2dxdy.$$

Den sökta integralen har form

$$\iint_D (x^2 - y^2)^{10}\, dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} u^{10} v^{10} \, \frac{1}{4} \, dudv = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^{1} u^{10} du \right)^2 = \frac{2}{121}.$$

Svar: $\frac{2}{121}$.

(5) Låt $F(x, y, z) = xy + 2yz + zx$, $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Visa (genom att använda en lämplig sats) att ytorna $F(x, y, z) = 4$ och $G(x, y, z) = 1$ i en omgivning till punkten $(1, 1, 1)$ har en skärningskurva med en parameterframställning av formen

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = t. \end{cases}$$

Bestäm kurvans tangentriktning i punkten $(1, 1, 1)$.

Lösning: Skärningen mellan ytorna ges av systemet

$$\begin{cases} F(x, y, z) = xy + 2yz + zx = 4, \\ G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

Vi behöver hitta två C^1-funktioner, $x(z)$ och $y(z)$, sådana att i en omgivning till punkten $z = 1$ gäller

$$\begin{cases} F(x(z), y(z), z) = 4, \\ G(x(z), y(z), z) = 1. \end{cases}$$

Derivering av ekvationerna ovan med avseende på z ger

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} x' + \frac{\partial G}{\partial y} y' + \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

d.v.s.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Observera att funktionerna F och G är C^1 i en omgivning av punkten $(1, 1, 1)$. Nu, enligt implicita funktionssatsen, om determinanten

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}$$

i punkten $(1, 1, 1)$ är skild från 0, så är funktionerna $x(z)$ och $y(z)$ entydigt definierade och C^1 i en omgivning av punkten $z = 1$. I vårt fall har vi:

$$\nabla F(x, y, z) = (y + z, x + 2z, 2y + x), \quad \nabla G(x, y, z) = (2x, 2y, -2z);$$
$$\nabla F(1, 1, 1) = (2, 3, 3), \quad \nabla G(1, 1, 1) = (2, 2, -2).$$

Vi har alltså

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} (1, 1, 1) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2 \neq 0,$$

älltså är funktionerna $x(z)$ och $y(z)$ entydigt definierade och C^1 i en omgivning av punkten $z = 1$. Med $z = t$ kan skärningen nära punkten $(1, 1, 1)$ skrivas på parameterform som i uppgiften.

Kurvans tangentriktning i denna punkt ges av $(x'(1), y'(1), 1)$. Vi beräknar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vilket ger: $x'(1) = 6$, $y'(1) = -5$.

Svar: Tangentriktningen i $(1, 1, 1)$ är $(6, -5, 1)$.

(6) Bestäm det största och det minsta värde som funktionen $f(x, y) = xy$ antar på ellipsskivan $x^2 + xy + y^2 \leq 4$.

Lösning: Låt $g(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

Funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig (polynom), och ellipsskivan $g(x, y) \leq 4$ är ett kompakt område. Detta innebär att f antar ett största och ett minsta värde på ellipsskivan.

Eftersom derivatan av f är definierad i varje punkt av ellipsskivan, så antas maximum och minimum i en av följande punkter:

1). en inre stationär punkt

2). en randpunkt där ∇f är parallel med ∇g.

Studerar 1). $\nabla f(x, y) = (y, x)$. Den enda stationära punkten är $(x, y) = (0, 0)$; $f(0, 0) = 0$.

Studerar 2). Gradienten av g ges av $\nabla g(x, y) = (2x + y, x + 2y)$; Lagrangevillkoret innebär att vektorerna $\nabla f = (y, x)$ och $\nabla g = (2x + y, x + 2y)$ är linjärt beroende, vilket är ekvivalent till

$$\det \begin{pmatrix} 2x + y & y \\ x + 2y & x \end{pmatrix} = 2x^2 - 2y^2 = 2(x + y)(x - y) = 0.$$

Vi har även villkoret $g(x,y) = 4$.

Vi har 2 fall:
Om $x = y$, ger villkoret $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 4$ att $3x^2 = 4$, dvs $x = \pm 2/\sqrt{3}$. Vi får två punkter: $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ och $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$ med värden

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Om $x = -y$, ger villkoret $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 4$ att $x^2 = 4$, dvs $x = \pm 2$. Detta ger oss punkterna $(2,-2)$ och $(-2,2)$ med motsvarande värden

$$f(2,-2) = f(-2,2) = -4.$$

Jämförande av värden ovan ger: det största värdet är $\frac{2}{\sqrt{3}}$, och det minsta värdet är -4.

(7) Är kraftfältet

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^3 - 3xy^2,\ y^3 - 3x^2y)$$

konservativt i $\mathbb{R}^2$? Bestäm i så fall en potentialfunktion $U(x,y)$ sådan att $U(1,1) = 0$.

Lösning: Om vi hittar en potentialfunktion som är definierad i $\mathbb{R}^2$, så har vi även visat att kraftfältet är konservativt. Sök därför $U(x,y)$ sådan att

$$(*) \qquad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = x^3 - 3xy^2, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = y^3 - 3x^2y. \end{cases}$$

Först integrerar vi den första ekvationen m.a.p. x:

$$U(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \phi(y).$$

Deriverar denna uttryck m.a.p. y och jämför med kravet (*):

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -3x^2y + \phi'(y) = y^3 - 3x^2y.$$

Detta ger: $\phi(y) = \frac{1}{4}y^4 + C$ där C är en valfri konstant.

Vi har visat att kraftfältet är konservativt, och varje potential har form $U(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + C$ där C är en valfri konstant.

Om vi sätter $U(1,1) = 0$, så får vi $C = 1$, och den motsvarande potentialen är $U_0(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + 1$.

(8) Masstätheten för en gas ges av $\rho(x,y,z) = C(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}e^{-(x^2+y^2+z^2)}$, där C är en konstant. Gasen befinner sig i rummet utanför ett klot som ges av $x^2+y^2+z^2 \le 1$, d.v.s. i mängden $K = (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 > 1$. Beräkna gasens totala massa uttryckt i C.

Lösning: Massan ges av den generaliserade integralen

$$M = \iiint_K \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Uttryckt i rymdpolära koordinater blir det:

$$M = C\int_0^\infty \int_0^{2\pi}\int_0^\pi Cr^{-1}e^{-(r^2)}\, r^2 \sin\theta \, d\theta\, d\phi\, dr = 4\pi C\int_0^\infty re^{-(r^2)}\, dr =$$

$$4\pi C \lim_{R\to\infty}[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_1^R = 2\pi C e^{-1}.$$

(9) Använd Greens sats för att beräkna arbetet som en partikel utför då den genomlöper kurvan γ given av $x^2+4y^2=4$ ett varv moturs i kraftfältet $\mathbf{F} = (y^3-x, y+3x^2)$.

Lösning: Enligt Greens sats, för $D = \{(x,y) \mid x^2+4y^2 \le 4\}$ ges arbetet av

$$A = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} =$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(y+3x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3-x)\right) dx\, dy =$$

$$\iint_D 6x - 3y^2 dx\, dy.$$

We introduce a polar coordinate change:

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

$r\in[0,1]$, $\theta\in[0,2\pi]$. Then $dxdy = 2r\, drd\theta$, and

$$\iint_D 6x-3y^2 dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (24r^2\cos\theta - 6r^3\sin^2\theta) drd\theta =$$

(the first term integrates to 0 by the symmetry)

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 6r^3\sin^2\theta\, drd\theta = -\frac{3}{2}\pi.$$

(10) Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xz^2, yz^2, z^2-1)$ ut genom ytan S där S är cylinderytan $\{(x,y,z) : x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}$.

Lösning: Låt $\mathbf{N}$ vara den utåtpekande normalen. Då ges flödet av

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(s,t))\cdot(\mathbf{r}'_s\times\mathbf{r}'_t) ds\, dt,$$

där $\mathbf{r}(s,t)$, $(s,t)\in D$, är en parametrisering av S, och $\mathbf{r}'_s\times\mathbf{r}'_t$ är utåtpekande normal.

Låt oss parametrisera S med

$$\mathbf{r}(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z), \quad \theta\in[0,2\pi),\ z\in[0,1].$$

Då har vi:

$$\mathbf{r}'_\theta = (-\sin\theta,\cos\theta,0), \quad \mathbf{r}'_z = (0,0,1),$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_z = (\cos\theta,\sin\theta,0).$$

Flödet blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_D (z^2 \cos\theta, z^2 \sin\theta, z^2 - 1) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0)\, d\theta\, dz =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 z^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta \right) dz = \frac{2}{3}\pi.$$