

Lösningssförslag till tentamen i Flervariabelanalys, SF1674

Torsdag 12 mars 2020
Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

(1) (Detta är uppgift 2.81.) Bestäm alla lokala max- och min-punkter till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3 + y^3.$$

Lösning: Stationera punkter ges av

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 3y^2 = y(2 + 3y) = 0. \end{cases}$$

Detta ger punkterna: $(0, 0)$, $(0, -\frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3}, 0)$ samt $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

Karakteren av en lokal extrempunkt $\vec{p}$ ges av den kvadratiske formen

$$Q_{\vec{p}}(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{p})h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{p})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{p})k^2.$$

I vårt fall $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 + 6y$.

Undersöker $p_1 = (0, 0)$. Här $Q_{\vec{p}_1}(h, k) = 2h^2 + 2k^2$; denna är positivt definit, alltså är $p_1 = (0, 0)$ ett lokalt minimipunkt.

För $p_2 = (-\frac{2}{3}, 0)$ har vi $Q_{\vec{p}_2}(h, k) = -2h^2 + 2k^2$; denna är indefinit, alltså är $p_2 = (-\frac{2}{3}, 0)$ en sadelpunkt (varken lokalt maximum eller minimum). På samma sätt är $p_3 = (0, -\frac{2}{3})$ en sadelpunkt.

För $p_4 = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ har vi $Q_{\vec{p}_4}(h, k) = -2h^2 - 2k^2$; denna är negativt definit, alltså är p_4 ett lokalt maximipunkt.

(2) (a). Avgör om följande gränsvärde existerar och i så fall beräkna det:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{(x^2+y^2)^{5/4}};$$

(b). Avgör om följande generaliserade integral är konvergent och i så fall beräkna den:

$$\iint_D \frac{x+y}{(x^2+y^2)^{5/4}} dx dy,$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Lösning: (a). Fixera $x = 0$ och låt $y \rightarrow 0$ (med andra ord, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ längs med linjen $x = 0$). På denna linje har vi

$$\frac{x+y}{(x^2+y^2)^{5/4}} = \frac{y}{(y^2)^{5/4}} = y^{-3/2},$$

vilket saknar gränsvärde då $y \rightarrow 0$. Svar: gränsvärdet i frågan saknas.

(b). Gå över till polära koordinater:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x+y}{(x^2+y^2)^{5/4}} dx dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \frac{r(\cos \theta + \sin \theta)}{r^{5/2}} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \int_0^2 r^{-1/2} dr = 2 \cdot 2[\sqrt{r}]_0^2 = 4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(3) Bestäm alla två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner f sådana att

$$u(x, y) = xf(xy)$$

är en lösning till den partiella differentialekvationen

$$yu''_{xy} - xu''_{xx} = 0.$$

Lösning: Låt $f \in C^2$. Vi beräknar:

$$u'_x(x, y) = f(xy) + xyf'(xy),$$

$$u'_{xy}(x, y) = 2xf'(xy) + x^2yf''(xy), \quad u'_{xx}(x, y) = 2yf'(xy) + xy^2f''(xy),$$

och slutligen,

$$yu''_{xy} - xu''_{xx} = 2xyf'(xy) + x^2y^2f''(xy) - (2xyf'(xy) + x^2y^2f''(xy)) = 0.$$

Alltså är ekvationen uppfylld för varje $f \in C^2$.

(4) Området D i xy -planet beskrivs av olikheterna $0 \leq x \leq 2y \leq \sqrt{\pi}$. Gör en skiss över området D och beräkna integralen

$$\iint_D \sin(y^2) dx dy$$

genom upprepade integration med början i x -led.

Lösning: Området är en triangel med hörn i punkter $(0, 0)$, $(0, \sqrt{\pi}/2)$ och $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}/2)$.

$$\begin{aligned}\iint_D \sin(y^2) dx dy &= \int_0^{\sqrt{\pi}/2} \left(\int_{x=0}^{2y} \sin(y^2) dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{\pi}/2} 2y \sin(y^2) dy \\ &= -[\cos(y^2)]_0^{\sqrt{\pi}/2} = 1 - 1/\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(5) (Detta är uppgift 3.36.) Betrakta den funktion $\mathbf{f} : (x, y) \mapsto (u, v)$ från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$\begin{cases} u = x^2 + y, \\ v = xy^2 - x^3. \end{cases}$$

(a). Bestäm funktionalmatrisen för $\mathbf{f}$;

(b). Bestäm matrisen för den linjära avbildning som är linjariseringen av $\mathbf{f}$ i punkten $(1, 2)$.

(c). Använd linjariseringen ovan för att finna en approximativ lösning nära $(1, 2)$ till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y = 3.05, \\ xy^2 - x^3 = 3.06. \end{cases}$$

Lösning: se tips och svar till Uppgift 3.36 i övningsboken.

(6) Bestäm eventuella största och minsta värde av funktionen

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$$

på området $D = \{(x, y) \mid |y| \leq x\}$.

Glöm inte att motivera dina resultat!

Lösning: För alla $(x, y) \in D$ har vi $f(x, y) \geq 0$, och $f(0, 0) = 0$. Därför antas funktionens minimum i punkten $(0, 0)$.

Observera att området är obegränsad. Vi märker att $f(x, y) \rightarrow 0$ då $|(x, y)| \rightarrow 0$.

De stationära punkterna till funktionen ges av $\text{grad } f = 0$, dvs

$$\begin{cases} \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = 0. \end{cases}$$

Den enda lösningen i D är $(1, 0)$. $f(1, 0) = \frac{1}{2}$.

Undersöker randen av D . Randkomponenter är kurvor $\gamma_+ = \{(x, y) \mid x = y, x \geq 0\}$ och $\gamma_- = \{(x, y) \mid x = -y, x \geq 0\}$. Låt $g(x)$ vara begränsningen av $f(x, y)$ till γ_+ :

$$g(x) = f(x, x) = \frac{x}{1 + 2x^2}, \quad x \geq 0.$$

Vi söker maximum av $g(x)$. Kritiska punkter ges av $g'(x) = \frac{1-2x^2}{(1+2x^2)^2} = 0$, vilket ger $x = 1/\sqrt{2}$. Värdet av f i denna punkt är

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2}.$$

Eftersom funktionen g är växande på $[0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ och avtagande på $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, är detta maximum av f över γ_+ . Maximum av f över γ_- är samma.

Betrakta kompaktet $K = \{(x, y) \in D \mid (x^2 + y^2) \leq 200\}$. Beteckna $\gamma = \{(x, y) \in D \mid (x^2 + y^2) = 200\}$ (då har vi $\gamma \subset \partial K$), och låt $D \setminus K$ vara mängden av de punkter i D som inte ligger i K .

På $D \setminus K$ har vi $(x^2 + y^2) \geq 200$, $x^2 \geq y^2$ och $x \geq 0$. Därför får vi på $D \setminus K$: $x^2 \geq 100$, $x \geq 10$ och

$$\frac{x}{1 + x^2 + y^2} \leq \frac{x}{x^2} \leq 1/10.$$

Detta medför att det största värdet av f över D måste antas på K .

Samma uträkning som ovan ger att för alla (x, y) på γ har vi $f(x, y) \leq 1/10$.

Den kontinuerliga funktionen f på kompaktet K måste anta sitt största värde. Denna kan antas i den stationära punkten eller på randen (eller i de punkter där derivatan av f saknas, men vi har inga sådana punkter).

Men randen av K består av tre komponenter varav en är γ , och de andra två är delmängder av γ_+ och γ_- . Ovan har vi set att värdet av f på varje randkomponent är mindre än $1/2$.

Vi ser att maximum av f på ∂K är $f(1, 0) = \frac{1}{2}$.

- (7) Låt K vara ett homogent halvklot som har radie R , medelpunkt i origo och ligger ovanför xy -planet. Beräkna z -koordinaten för kroppen K 's masscentrum som ges av

$$z_c = \frac{1}{V} \iiint_K z \, dx \, dy \, dz,$$

där V är volymen av K .

Lösning: Volymen av K är hälften av volym av en klot med radie R :

$$V = \frac{1}{2} \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Inför rymdpolära koordinater (r, ϕ, θ) . Kroppen K beskrivs av

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2,$$

$z = r \cos \theta$, och $dx \, dy \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$. Vi får:

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{V} \iiint_K z \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^R r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr \right) d\theta \right) d\phi \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta \frac{R^4}{4} \sin \theta \, d\theta \right) d\phi \\ &= \frac{3R}{16\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{3R}{8}. \end{aligned}$$

- (8) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma x \, dx + (x^2 + y) \, dy$, där γ är den kontinuerliga kurvan som består av linjesegmentet från origo till punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, samt delen av enhetscirkeln från punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ till punkten $(-1, 0)$ genomlupen moturs.

Lösning: Kurvintegralen i frågan har form $\int_\gamma P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy$ där $P(x, y) = x$ och $Q(x, y) = x^2 + y$. Både P och Q är C^1 funktioner på $\mathbb{R}^2$. Låt γ_1 vara ett linjesegment från $(-1, 0)$ till $(0, 0)$, och låt D vara det ändliga område vars rand är unionen av γ och γ_1 . Enligt Greens sats,

$$\int_\gamma x \, dx + (x^2 + y) \, dy + \int_{\gamma_1} x \, dx + (x^2 + y) \, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy = \iint_D 2x \, dx \, dy.$$

I polära koordinater

$$\iint_D 2x \, dx dy = 2 \int_{\pi/4}^{\pi} \int_0^1 r^2 \cos \theta \, dr d\theta = 2 \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Vidare, γ_1 parametriseras med $r(x) = (x, 0)$ där $x \in [-1, 0]$. Vi får $r'(x) = (1, 0)$, vektorfältet på kurvan är (x, x^2) , och $\int_{\gamma_1} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \int_{-1}^0 (1, 0) \cdot (x, x^2) \, dx = \int_{-1}^0 x \, dx = -1/2$. Slutligen,

$$\int_{\gamma} x \, dx + (x^2 + y) \, dy = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}.$$

- (9) (a). Bestäm konstanterna a och b så att vektorfältet $\mathbf{F} = (ax^2 + xy, y^2 - xy, byz + x^4)$ blir källfritt (dvs, uppfyller $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$).
 (b). För dessa värden på a och b beräkna flödesintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ där ytan Y ges av $\{x^2 + y^2 + 2z^2 = 5, z \geq 0\}$.

Lösning: $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2ax + y + 2y - x + by = (2a - 1)x + (3 + b)y$. Detta är konstant noll om och endast om $a = 1/2$ och $b = -3$.

Låt K beteckna kroppen $\{x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 5, z \geq 0\}$. Randen av K är unionen av ytan Y och disken $D = \{x^2 + y^2 \leq 5\}$.

Enligt Gauss sats,

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = 0,$$

dvs

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

I den sista integralen har vi den utåtriktade normalen, dvs $\mathbf{N} = (0, 0, -1)$. Här har vi $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{F}|_{z=0} \cdot \mathbf{N} \, dx dy = -x^4 \, dx dy$. Alltså,

$$\begin{aligned} \iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} r^5 \cos^4 \theta \, dr d\theta = \frac{5^3}{6} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \, d\theta \\ &= \frac{5^3}{6} \frac{3}{8} 2\pi = \frac{5^3 \pi}{8}. \end{aligned}$$

- (10) Använd Stokes sats för att räkna ut arbetet som kraftfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, y^2, x)$ utför längs randen till triangeln med hörn i $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Lösning: Om Y är en orienterad yta med orienterad rand ∂Y och enhetsnormal $\mathbf{N}$, så säger Stokes sats att

$$\int_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

En naturlig yta Y i fallet ovan är den del av planet $x + y + z = 1$ som ligger i första kvadranten (en plan triangel). I det här fallet är $\text{rot}\mathbf{F} = (0, 2z - 1, 0)$ (uträkningen utelämnas).

Vi kan se Y som graf av funktionen $z = f(x, y) := 1 - x - y$ där (x, y) ligger i området $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Eftersom Y är en funktionsyta,

$$\mathbf{N}dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)dx dy = (1, 1, 1) dx dy.$$

Sammanställning av informationen ovan ger att arbetet ges av

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (2z - 1) dy dx = -1/6.$$