Lösningsförslag till tentamen

Fredag 7 juni 2019 08:00-13:00
SF1674 Flervariabelanalys samt SF1603 Differential- och integralkalkyl II
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

(1) Avgör om gränsvärdet existerar, och beräkna i så fall dess värde:

a). $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-1}{x-1}$

Lösning: Om gränsvärdet ovan finns, så måste den vara samma då $(x,y)\to(1,1)$ längs med alla kurvor. Låt $(x,y)\to(1,1)$ längs med kurvan $\{y=1\}$. Då måste gränsvärdet ovan vara

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=1.$$

Låt $(x,y)\to(1,1)$ längs med kurvan $\{y=x\}$. Då måste gränsvärdet ovan vara

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1} x+1=2.$$

Vi fick olika värden. Gränsvärdet i fråga saknas.

b).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(1+y)x^2+(1+x)y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+\frac{yx^2+xy^2}{x^2+y^2})=$$
$$\lim_{r\to 0}(1+\frac{r^3(\sin\theta\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2})=1.$$

Vi använde polära koordinater (r,θ).

Lösning:

(2) Bestäm alla punkter $P_0=(a,b,c)$ på paraboloiden $z=3+x^2+y^2$ sådana att tangentplanet till paraboloiden i P_0 går genom punkterna $(1,1,0)$ och $(1,-1,0)$.

Lösning: Vi har $f_x=2x$, $f_y=2y$, och alltså $f_x(a,b)=2a$, $f_y(a,b)=2b$. Tangentplanet i punkten P_0 har därför ekvationen

$$z=c+2a(x-a)+2b(y-b)=2ax+2by+c-2a^2-2b^2.$$

Tangentplanet går genom punkter $(1,1,0)$ och $(1,-1,0)$ om och endast om

$$0=2a+2b+c-2a^2-2b^2$$

och

$$0=2a-2b+c-2a^2-2b^2.$$

Subtraherar vi den andra ekvationen från den första, så får vi $0=4b$, alltså $b=0$. Sätter vi in $b=0$ i den första ekvationen så får vi $0=2a+c-2a^2$, alltså $c=2a^2-2a$.

Eftersom P_0 ligger på paraboloiden, gäller även sambandet $c = 3 + a^2 + b^2 = 3 + a^2$. Av dessa två villkor får vi ekvationen

$$2a^2 - 2a = 3 + a^2 \;\Leftrightarrow\; a^2 - 2a = 3 \;\Leftrightarrow\; a = -1 \text{ eller } a = 3.$$

De sökta punkterna $P_0 = (a, b, c) = (a, 0, 3 + a^2)$ är därför $(-1, 0, 4)$ och $(3, 0, 12)$.

(3) Transformera differentialuttrycket f''_{xy} till de nya variablerna

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = xy. \end{cases}$$

Lösning: 2.55 i övningsboken

(4) Bestäm och karakterisera alla stationära punkter till funktionen $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$.

Lösning: De stationära punkterna ges av ekvationerna $0 = f_x = 4x^3 - 4y = 4(x^3 - y)$ och $0 = f_y = -4x + 4y = 4(-x + y)$. Ur den andra ekvationen får vi $y = x$. Sätter vi in detta i den första ekvationen så får vi $0 = x^3 - x = x(x^2 - 1)$, med rötterna $x = 0$ och $x = \pm 1$. De stationära punkterna är alltså $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(-1, -1)$. Hessianen för f är

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Därför

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad H(-1, -1) = H(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Den quadratiska formen som hör till $H(0, 0)$ är

$$Q_1(h, k) = -8hk + 4k^2 = 4(k^2 - 2hk + h^2 - h^2) = 4((k - h)^2 - h^2),$$

indefinit. Alltså är $(0, 0)$ en sadelpunkt.

Den quadratiska formen som hör till $H(1, 1) = H(-1, -1)$ är

$$Q_2(h, k) = 12h^2 - 8hk + 4k^2 = 4((k - h)^2 + 2h^2),$$

positivt definit. Därför är både $(1, 1)$ och $(-1, -1)$ strikta lokala minimipunkter.

(5) a). Visa (genom att använda en lämplig sats) att ekvationen

$$x^4 - 4xy + 2y^2 + y = 0$$

i en omgivning av $(1, 1)$, definierar en funktion $y = g(x)$ sådan att $g(1) = 1$.

Lösning: Låt $F(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 + y$. Vi har då $F_x = 4x^3 - 4y$ och $F_y = -4x + 4y + 1$. Eftersom $F(1, 1) = 0$ och $F_y(1, 1) = 1 \neq 0$, så följer av implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x, y) = 0$ i en omgivning av punkten $(1, 1)$ definierar en funktion $y = y(x) = g(x)$ (med kontinuerliga derivator av alla ordningar) sådan att $g(1) = 1$.

b). Bestam Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $g(x)$.

Lösning: Deriverar uttrycket $F(x, g(x)) = 0$ för alla x nära 1 m.a.p. x:

$$0 = F'_x(x, g(x)) + F'_y(x, g(x))g'(x) = 4x^3 - 4g(x) + (-4x + 4g(x) + 1)g'(x).$$

Om vi sätter in $x = 1$, $g(1) = 1$, så får vi $g'(1) = 0$. För att få fram $g''(1)$, deriverar uttrycket ovan en gång till m.a.p. x:

$$0 = 12x^2 - 4g'(x) + (-4 + 4g'(x))g'(x) + (-4x + 4g(x) + 1)g''(x).$$

Sätter vi in $x = 1$, $g(1) = 1$, $g'(1) = 0$, så får vi $g''(1) = -12$.

Taylorpolynomet av grad 2 för $g(x)$ kring 1 är $P(x) = 1 - 6(x - 1)$.

(6) Bestäm, om det existerar, maximum av funktionen $f(x, y, z) = xy^2z^3$ då $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + 2y + 3z \leq 6$.

Lösning: Vi söker maximum av en kontinuerlig funktion över en kompakt mängd M (som är en tetraeder). Den globala maximum antas i M enligt en känd sats om kontinuerliga funktioner. Funktionen är även deriverbar i M. Därför, om maximum antas i en inre punkt $p \in M$, så grad $f(p) = 0$.

$$\text{grad } f = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2).$$

Detta är lika med 0 bara på koordinatplanen (randpunkter av M), alltså maximum antas inte inne i M.

Undersöker randen. På koordinatplanen är värdet av funktionen 0, ej maximum. Betrakta randkomponenten K som ges av $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + 2y + 3z = 6$. Denna utgör en kompakt triangel i första oktanten, och funktionen antar ett maximum på den. Eftersom $f(x, y, z) \geq 0$ i alla dessa punkter och $f(x, y, z) = 0$ då $x = 0$, $y = 0$ eller $z = 0$, så måste maximum antas i en punkt där $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ och $g(x, y, z) = x+2y+3z-6 = 0$. I maxpunkten är grad f parallell med grad $g = (1, 2, 3)$, vilket ger oss ekvationerna

$$\frac{y^2z^3}{1} = \frac{2xyz^3}{2} = \frac{3xy^2z^2}{3}.$$

Dividerar vi alla tre leden med $f = xy^2z^3$ så får vi

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z},$$

dvs $x = y = z$. Sätter vi nu in $z = y = x$ i $0 = g(x, y, z)$ så får vi $0 = x + 2x + 3x - 6 = 6x - 6$, med den unika lösningen $x = 1$. Maximum av funktionen är alltså $f(1, 1, 1) = 1$.

(7) Beräkna volymen V av den ändliga kropp K som begränsas av ytorna $z = x^2 - 2$ och $z = 2 - y^2$.

Lösning: Kroppen K består av alla punkter (x, y, z) sådana att $x^2 - 2 \leq z \leq 2 - y^2$. För att denna dubbla olikhet skall kunna gälla måste $x^2 - 2 \leq 2 - y^2$, vilket är ekvivalent med att $x^2+y^2 \leq 4$. Projektionen D, av K, på xy-planet är alltså cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 4$, och

$$V = \iint_D ((2-y^2)-(x^2-2))\,dx\,dy = \iint_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy = 8\pi.$$

(8) Låt S vara sfären $x^2+y^2+z^2=9$; och låt vidare $\mathbf{F}(x,y,z)=(3x,2y,-z)$ vara ett vektorfält. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom ytan S.

Lösning: Låt B vara bollen $x^2+y^2+z^2 \leq 9$. Då utgör S randen av (den kompakta området) B. Enigt divergenssatsen, uppfyller det sökta flödet:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds = \iiint_B \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz =$$
$$\iiint_B (3+2-1)dx\,dy\,dz = 4\text{Vol}\,(B) = 4\frac{4}{3}\pi 3^3 = 144\pi.$$

(9) Beräkna linjeintegralen

$$\int_\gamma (x^3-x^2y)\,dx + xy^2\,dy$$

där γ är halvcirkeln $x^2+y^2=4$ i det övre halvplanet i $\mathbb{R}^2$ genomlöpt moturs (d.v.s. från punkten $(2,0)$ till $(-2,0)$).

Lösning: Betrakta området D som är en halvdisk: $x^2+y^2 \leq 4$, $y \geq 0$. Låt γ_1 vara ett linjestycke från punkten $(-2,0)$ till $(2,0)$. Enligt Greens sats,

$$\int_\gamma (x^3-x^2y)\,dx + xy^2\,dy + \int_{\gamma_1} (x^3-x^2y)\,dx + xy^2\,dy =$$
$$\iint_D \partial_x(xy^2) - \partial_y(x^3-x^2y)\,dxdy.$$

På γ_1 har vi $y=0$, $x \in [-2,2]$ alltså är den andra av integralerna ovan lika med $\int_{-2}^2 x^3\,dx = 0$. Vidare, är integralen i högerledet lika med

$$\iint_D y^2+x^2\,dxdy = \int_0^2 \int_0^\pi r^2 r\,dr d\theta$$
$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \pi = 4\pi.$$

Slutligen,

$$\int_\gamma (x^3-x^2y)\,dx + xy^2\,dy = 4\pi.$$

(10) Kurvan C är skärningen mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $x + y + z = 1$. Kurvan syns positivt orienterad från positiva z-axeln. Använd Stokes sats för att beräkna arbetet som kraftfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^5y^6 + xy, 3x + xz + x^6y^5, -z)$$

utför på en partikel som rör sig ett varv i positiv led runt C.

Lösning: Enligt Stokes sats ges arbetet av

$$\iint_R \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

där R är den del av planet $x + y + z = 1$ som ligger inom cylindern $x^2 + y^2 = 1$, och $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ är enhetsnormalen.

Vi beräknar $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (-x, 0, 3 + z - x)$, och på planet $x + y + z = 1$ ger detta $(-x, 0, 3 + (1 - x - y) - x) = (-x, 0, 4 - 2x - y)$

$$\iint_R \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_D (4 - 3x - y) dxdy,$$

där D är disken $x^2 + y^2 \leq 1$. Av symmetrin, är den sista integralen lika med

$$\iint_D 4dxdy = 4\pi.$$