Tentamen

Torsdag 13 mars 2019 08:00-13:00
SF1674 Flervariabelanalys samt SF1603 Differential- och integralkalkyl II
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Varje uppgift ger maximalt 4 poäng.

(1) a). Beräkna gränsvärdet av $\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+2y^4}$ då $(x,y) \to (0,0)$ längs kurvan $x = y^2$.

Lösning: På kurvan $x = y^2$ gäller

$$\frac{\sin(xy^2)}{x^2+2y^4} = \frac{\sin(y^4)}{y^4+2y^4} = \frac{1}{3},$$

och det sökta gänsvärdet är $\frac{1}{3}$.

b). Avgör om gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2+2y^4}$ existerar.

Lösning: Observera att på kurvan $y = 0$ har vi $\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+2y^4} = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Eftersom gränsvärdena då funktionen närmar sig origo längs kurvan $x = y^2$ och längs kurvan $y = 0$ är olika, kan gränsvärdet i frågan inte existera.

c). Avgör om gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+y^4}}$ existerar.

Lösning: Observera att

$$\frac{\sin(x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+y^4}} = \frac{\sin(x^2+2y^2)}{(x^2+2y^2)} \frac{(x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+y^4}},$$

Den första kvoten går mot 1 då $(x,y) \to (0,0)$, vilket kan visas med hjälp av substitutionen $t = x^2+2y^2$. För den andra gäller:

$$0 \leq \frac{(x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+y^4}} \leq \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad \text{då } (x,y) \to (0,0).$$

Därför

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+y^4}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Gränsvärdet existerar.

(2) Använd koordinatbytet $u = x + y$, $v = y - x$, för att beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 - y^2)^{10}\, dxdy$$

där området D ges av $|x| + |y| \leq 1$.

Lösning: (Detta är Uppgift 6.19 från boken.) I de nya koordinaterna har vi:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = -uv; \quad dudv = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} dxdy = 2dxdy,$$

området skrivs om som $\{(u,v) \mid -1 \leq u \leq 1,\ -1 \leq u \leq 1\}$. Den sökta integralen har form

$$\iint_D (x^2 - y^2)^{10}\, dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^{10}v^{10}\,\frac{1}{2}\, dudv = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} u^{10} du\right)^2 = \frac{2}{121}.$$

(3) a). Beräkna kurvintegralen av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = (y + 3x,\ 2y - x)$ längs kurvan γ som ges av ekvationen $4x^2 + y^2 = 4$ och är orienterad moturs.

b). Ange ekvationen för tangentlinjen till kurvan γ i punkten $(x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$.

Lösning: Man kan parametrisera γ som $(x(t), y(t)) = \mathbf{r}(t)$ där

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = 2\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2\sin t + 3\cos t,\ 4\sin - \cos t)\cdot(-\sin t,\ 2\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (5\sin t\cos t - 2)\, dt = -4\pi.
\end{aligned}$$

b). Eftersom tangentvektorn i punkt $(x(t), y(t))$ är

$$(x'(t), y'(t)) = \mathbf{r}'(t) = (-\sin t,\ 2\cos t) = (-y/2, 2x),$$

så är en tangentvektor i punkten $(x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ följande:

$$v := (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}),$$

och en normalvektor till kurvan i samma punkt är $(1, \frac{1}{2})$. Tangentlinjen har form

$$(x - \frac{\sqrt{2}}{2}, y - \sqrt{2})\cdot(1, \frac{1}{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y/2 - \sqrt{2} = 0.$$

(4) a). Bestäm konstanten A så att ytorna $2x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och $x^2 + yz = A$ tangerar varandra (dvs, har ett gemensamt tangentplan).

b). Ange alla tangenspunkter.

Lösning: a). Ytorna tangerar varandra om och endast om deras normaler är parallella, dvs $(4x, 2y, 2z) = \lambda(2x, z, y)$ för något λ. Vi får

$$\begin{cases} 4x = 2\lambda x \\ 2y = \lambda z \\ 2z = \lambda y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (1) \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = z. \end{cases} \quad \text{eller} \quad (2) \begin{cases} x = 0 \\ y = (\lambda^2/4)y \\ z = (\lambda/2)y. \end{cases}$$

Case (1): Insättning av $y = z$ i ytornas ekvationer ger

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = A, \end{cases}$$

dvs, $A = 2$.

Case (2): Här har vi $x = 0$. Den andra ekvationenen ger: $\lambda = \pm 2$ eller $y = 0$.

Om $y = 0$, så $z = 0$ enligt den tredje ekvationen. Men punkten $(0, 0, 0)$ ligger inte på ellipsoiden $2x^2 + y^2 + z^2 = 4$, och är alltså ingen tangenspunkt.

Fallet $\lambda = 2$ har betraktats i Case (1). Låt oss betrakta $\lambda = -2$. Den tredje ekvationen ger $z = -y$. Insättning av $x = 0$, $z = -y$ i ytornas ekvationer ger

$$\begin{cases} 2y^2 = 4 \\ -y^2 = A, \end{cases}$$

dvs $A = -2$, $y = \pm\sqrt{2}$, $z = \mp\sqrt{2}$.

Svar a): Ytorna tangerar om och endast om $A = 2$ eller $A = -2$.

b). I fall $A = 2$ är tangentpunkterna de punkter som uppfyller

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = y. \end{cases}$$

Samma kurva kan parametriseras som union av två kurvor: $(x, y, z) = (\sqrt{2 - t^2}, t, t)$ och $(x, y, z) = (-\sqrt{2 - t^2}, t, t)$ där $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

I fall $A = -2$ är tangentpunkterna $(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ och $(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(5) Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$ i halvplanet $x \geq 0$. Ange i vilka punkter dessa värden antas. Glöm inte att motivera att dessa verkligen är globala max- och minimipunkter.

Lösning: Eftersom området $D = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$ är oändligt, måste vi studera lokala extrempunkter, funktionens beteende på randen och vid oändligheten.

Observera att randen av D ges av $x = 0$, och $f(0, y) = 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$. Observera vidare att $f(x, y) \geq 0$ för alla $(x, y) \in D$, och f antar därför sitt globala minimum

$f(x,y) = 0$ i varje punkt av randen. Dessutom ser vi att $f(x,y) > 0$ för $x \neq 0$, och därför antas det globala minimum bara på randen.

Vi studerar beteendet vid oändligheten. I polära koordinater

$$\left|\frac{x}{1+x^2+y^2}\right| = \frac{r|\cos\theta|}{1+r^2} \leq \frac{1}{2r} \to 0$$

då $r \to 0$. Alltså, $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = 0$. Det betyder att för varje $\varepsilon > 0$ finns R sådant att $f(x,y) < \varepsilon$ för alla $(x,y) \in D$ med $\sqrt{x^2+y^2} > R$. Fixera $\varepsilon = \frac{1}{4}$ samt ett motsvarande R.

Eftersom funktionen är kontinuerlig på det kompakta området

$$D_R = \{(x,y) \in D \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq R\},$$

så antar den sitt maximum på D_R.

Gradienten grad $f = (\frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2})$ är definierad överallt. De stationära punkterna är

$$\text{grad} f(x,y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (\pm 1, 0),$$

varav bara $(1,0)$ ligger i D. Vi har $f(1,0) = \frac{1}{2}$. Eftersom på randen av D_R har vi $f(x,y) \leq \frac{1}{4}$, är detta det absoluta maximum över D_R.

Detta är även det globala absoluta maximum över D eftersom utanför D_R har vi $f(x,y) \leq \frac{1}{4}$.

Svar: Det globala maximum är $\frac{1}{2}$, antas i punkt $(1,0)$; det globala minimum är 0, antas på linjen $x = 0$.

(6) a). Avgör om ekvationen

$$x^2 + 2xz + y^3 - yz + z^4 = 4$$

i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ implicit definierar en C^1-funktion $z = z(x,y)$.

b). Om funktionen $z(x,y)$ i a) är definierad, ange i vilken riktning från $(1,1)$ funktionen $z(x,y)$ växer snabbast?

Lösning: a). Sätt $F(x,y,z) = x^2+2xz+y^3-yz+z^4$. Vi har $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ eftersom F är ett polynom. Eftersom $F'_z(1,1,1) = 5 \neq 0$, så följer det från Implicita funktionssatsen att $F(x,y,z) = 4$ i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ implicit definierar en C^1-funktion $z = z(x,y)$ sådan att för alla (x,y) nära $(1,1)$ gäller

$$F(x,y,z(x,y)) = 4.$$

b). Funktionen $z(x,y)$ växer snabbast i gradientens riktning. För att hitta z'_x, derivera ekvationen ovan implicit med avseende på x:

$$F'_x(x,y,z(x,y)) = 2x + 2z + 2xz'_x - yz'_x + 4z^3 z'_x = 0.$$

Insättning av $(x,y,z) = (1,1,1)$ ger $2 + 2 + 2z'_x(1,1) - z'_x(1,1) + 4z'_x(1,1) = 0$, dvs $z'_x(1,1) = -4/5$.

På samma sätt får man

$$F'_y(x, y, z(x, y)) = 2xz'_y + 3y^2 - z - yz'_y + 4z^3 z'_y = 0,$$

och insättning av $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ger $z'_y(1, 1) = -2/5$.

Svar: Värdet av $z = z(x, y)$ växer snabbast i punkten $(1, 1)$ när (x, y) ändras från $(1, 1)$ i riktningen $(-4/5, -2/5)$.

(7) a). Visa att vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = ((2x - 3x^4)e^{y-x^3} + 1,\ x^2 e^{y-x^3})$ har en potential.

b). Beräkna integralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där C är en kurva som går från origo till $(2, 0)$ längs x-axeln, och sedan rakt upp till $(2, 10)$.

Lösning: U är en potential till $\mathbf{F}$ om $\operatorname{grad} U = \mathbf{F}$, dvs

$$U'_x(x, y) = (2x - 3x^4)e^{y-x^3} + 1, \quad U'_y(x, y) = x^2 e^{y-x^3}.$$

Integrera den andra ekvationen med avseende på y. Vi får

$$U(x, y) = x^2 e^{y-x^3} + f(x)$$

där $f(x)$ är en godtycklig deriverbar funktion. Derivera detta uttryck med avseende på x och använd den första av ekvationerna ovan:

$$U'_x(x, y) = (2x - 3x^4)e^{y-x^3} + f'(x) = (2x - 3x^4)e^{y-x^3} + 1.$$

Detta ger att $f'(x) = 1$, dvs $f(x) = x+$Const. Vi kan välja Const$= 0$, och då får vi att

$$U(x, y) = x^2 e^{y-x^3} + x$$

är en potential för $\mathbf{F}$.

b). Ändpunkterna för kurvan C är $(0, 0)$ och $(2, 10)$. Eftersom $\mathbf{F}$ är ett potentialfält, gäller det att

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(2, 10) - U(0, 0) = 4e^2 + 2.$$

(8) Bestäm flödet av fältet $\mathbf{F} = (2x,\ -2y,\ -2)$ genom ytan

$$\mathbf{r}(s, t) = (3s,\ -2t^2,\ 2s + t + 1), \quad 0 \le s \le 1, \quad -1 \le t \le 1$$

i riktningen av normalen $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t$.

Lösning:

Vi beräknar

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (8t, -3, -12t).$$

På ytan kan $\mathbf{F}$ uttryckas som

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(s, t)) = (6s, 4t^2, -2).$$

Det sökta flödet är

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot \mathbf{N}\, dsdt =$$
$$\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1} (48st - 12t^2 + 24t)\, dtds = -8.$$

(9) Bestäm flödet av fältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2,\, -2xy,\, 3xz)$ ut genom randen ∂K av kroppen K, där

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

Lösning: Vi använder divergenssatsen som ger:

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot dS = \iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F} \cdot dV.$$

Vi beräknar $\mathrm{div}\mathbf{F} = 2x - 2x + 3x = 3x$, och inför sfäriska koordinater:

$$(x, y, z) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta),$$

där

$$0 \le r \le 2, \quad 0 \le \phi \le \pi/2, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Man beräknar Jakobideterminanten för koordinatbytet $J = r^2 \sin\theta$. Den sökta integralen är

$$3\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^2 r\ \sin\theta\cos\phi r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi =$$
$$3\int_0^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^2 r^3\, dr = 6\pi.$$

Vid uträkning av integralen har vi infört polära koordinater.

(10) En tunna i form av en rak cirkulär cylinder med radie R och höjd H innehåller vatten. Om man lutar tunnan så att vatten precis börjar rinna ut, så skymmer vatten exakt hela botten (med "exakt" menas att om man lutar tunnan lite till, så ska vatten börja rinna ut, och en del av botten kommer över vattenytan).

Beräkna volymen av vatten i tunnan.

Lösning: Låt tunnan vara lutad så att vatten precis börjar rinna ut. Vi inför koordinater så att x-axeln är cylinders centralaxel, och botten av tunnan är området B som beskrivs av $z = 0$, $x^2 + y^2 \le R^2$; vattenytan i tunnan beskrivs som den del av planet

$$z = \frac{H}{2R}(y + R)$$

som ligger ovanför B. Vattens volym ges av

$$\iint_B \frac{H}{2R}(y + R) dxdy = \frac{H}{2R}\int_0^R \int_0^{2\pi} (r\sin\phi + R) r\, d\phi dr =$$

$$\frac{H}{2R}\int_0^R\int_0^{2\pi} Rr\, d\phi dr = \frac{H}{2R}2\pi R^3/2 = \pi R^2\frac{H}{2}.$$