Vorkurs Mathematik 2007

Vorlesung 3

Tilman Bauer

Universität Münster

11. September 2007

Ausgewählte Literatur

ohne Anspruch auf Vollständigkeit!

Stoff aus diesem Vorkurs und Wiederholung von Schulstoff

- Schäfer, Georgi, Trippler, Otto: *Mathematik-Vorkurs. Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger*. Teubner.
- Koch: *Einführung in die Mathematik. Hintergründe der Schulmathematik*. Springer.

Zum mathematischen Schreiben und Denken:

- Beutelspacher: *„Das ist o.B.d.A. trivial"*. Vieweg.

Weitergehendes zur Mengenlehre:

- Ebbinghaus: *Mengenlehre*. Spektrum Verlag.

Interessante weiterführende, aber immer elementare Themen, nicht nur für Informatiker:

- Graham, Knuth, Patashnik: *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley.

Mengen und Abbildungen

Zusammenfassung

In Vorlesung 2 haben wir betrachtet:

Mengen: „Zusammenfassungen von Objekten unserer Anschauung“

Abbildungen: Eine Abbildung $f\colon M \to N$ ordnet jedem Element der Menge M genau ein Element der Menge N zu.

injektiv: f ordnet verschiedenen Elementen von M verschiedene Elemente von N zu.

surjektiv: Jedes Element von N ist Bild von mindestens einem Element von M.

bijektiv: surjektiv+injektiv

Umkehrabbildung: Eine Abbildung $g\colon N \to M$ in der umgekehrten Richtung, so dass $f(g(n)) = n$ und $g(f(m)) = m$ für alle $m \in M$ und $n \in N$ gilt.

Mengen und Abbildungen

Bilder und Urbilder von Mengen

Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

- Ist $K \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist $f(K)$ die Menge der Bilder aller $k \in K$:

$$f(K) = \{f(k) \mid k \in K\} = \{n \in N \mid \exists k \in K\colon f(k) = n\}.$$

- Ist $L \subseteq N$ eine Teilmenge, so ist $f^{-1}(L)$ die Menge aller Urbilder aller $l \in L$:

$$f^{-1}(L) = \{m \in M \mid f(m) \in L\}.$$

- Dieses f^{-1} hat eine etwas andere Bedeutung als die der Umkehrfunktion!
- Insbesondere muss f nicht bijektiv sein, damit wir $f^{-1}(L)$ bilden können!

Mengen und Abbildungen

Bilder und Urbilder von Mengen

Beispiel

f sei gegeben durch

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
1 \arrow[dddr] & a \\
2 \arrow[ur] & b \\
3 \arrow[uur] & c \\
4 \arrow[dr] & d \\
 & e \\
M & N
\end{tikzcd}.$$

- $f(\{1,2\}) = \{a,d\}$
- $f(\{1,2,3,4\}) = \{a,d,e\}$
- $f^{-1}(\{a,e\}) = \{2,3,4\}$
- $f^{-1}(\{a,b,c\}) = \{2,3\}$
- $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset.$

Vollständige Induktion
Ein Beispiel

Lemma
Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$
- $0 + 1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$
- $0 + 1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$
- $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \cdot 6}{2}$.
- Wir gelangen nicht zu einem Beweis, indem wir die Aussage einfach für einige (viele) $n \in \mathbb{N}$ einzeln überprüfen!

Vollständige Induktion

Ein Beispiel

Lemma

Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Angenommen, wir wüssten, das das Lemma für $n = 78$ wahr ist.
Dann gälte:

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \cdots + 77 + 78 + 79 &= \tfrac{78 \cdot 79}{2} + 79 \\ &= \tfrac{78 \cdot 79 + 2 \cdot 79}{2} \\ &= \tfrac{80 \cdot 79}{2}. \end{aligned}$$

Also gälte es dann auch für $n = 79$!

Vollständige Induktion

Ein Beispiel

- Nennen wir die Aussage des Lemmas $P(n)$ (ein Prädikat). Wir haben also gezeigt; $P(78) \Rightarrow P(79)$.
- Dabei hätte 78 auch jede andere Zahl sein können: wir können zeigen: $\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$:

$$
\begin{aligned}
0 + 1 + \cdots + n + (n+1) &\underset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}
$$

- Da wir außerdem $P(0)$ nachgerechnet haben, haben wir somit $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.
- Diese Art von Beweis nennt man vollständige Induktion.

Vollständige Induktion

Das Prinzip

Das Prinzip der vollständigen Induktion (über den natürlichen Zahlen) lautet:

Gilt $P(0)$, und folgt für jedes n aus $P(n)$, dass auch $P(n+1)$ gilt, so gilt $P(n)$ für alle n.

In der Sprache der Prädikatenlogik:

$$P(0) \land \forall n\colon (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Longrightarrow \forall n\colon P(n).$$

- Wie können wir diese Schlussweise rechtfertigen?
- Dass Induktion möglich ist, ist ein Axiom der natürlichen Zahlen.
- Das bedeutet: ein Beweis muss tiefer liegen, in der Konstruktion der natürlichen Zahlen.
- Informell: „Würde Induktion nicht gelten, wären es nicht die natürlichen Zahlen!“

Vollständige Induktion

Aufbau eines induktiven Arguments

- Die Aussage $P(0)$ nennen wir Induktionsverankerung oder Induktionsstart. Diese muss zunächst gezeigt werden.
- Dann beweist man $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (den Induktionsschritt).
- Dazu nimmt $P(n)$ man an (Induktionsannahme) und folgert $P(n+1)$ (Induktionsschluss).
- Natürlich kann man auch $P(1)$ oder $P(15)$ als Induktionsstart wählen – dann folgt, dass $P(n)$ für alle $n \geq 1$ oder $n \geq 15$ gilt.
- Ebenso ist es beim Induktionsschritt erlaubt, die Gültigkeit aller $P(i)$ für $i = 1, \ldots, n$ anzunehmen und daraus $P(n+1)$ zu folgern.

Zum Begriff

In der Philosophie spricht man von einem deduktiven Argument, wenn vom Allgemeinen auf das Spezielle geschlossen wird:

Jeder Mensch muss schlafen. Olaf ist ein Mensch. Also muss Olaf schlafen.

Umgekehrt ist ein induktives Argument eines, das von Spezialfällen auf die Allgemeinheit schließt:

Alle Menschen, die ich kenne, müssen schlafen. Also müssen alle Menschen schlafen.

- Unser Alltagswissen basiert fast ausschließlich auf Induktion!
- Dennoch ist ein induktiver Schluss in der Mathematik nicht gültig.
- Die mathematische vollständige Induktion ist kein induktiver, sondern ein deduktiver Schluss.

Einige Schreibweisen

Die Schreibweise $0 + 1 + 2 + \cdots + n$ kann umständlich und fehlerträchtig sein.

Beispiel

Was bedeutet $1 + 2 + 4 + \cdots + 16$?

- Es könnte die Summe der Zweierpotenzen darstellen: $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^4$. Also $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$.
- Es könnte die Summe von Primzahlen minus 1 sein: $(2 - 1) + (3 - 1) + (5 - 1) + \cdots + (17 - 1)$. Also $1 + 2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 16 = 51$.
- Es könnte die Folge der Kettenpotenzen sein: $1 + 2 + 2^2 + 2^{(2^2)} = 1 + 2 + 4 + 16 = 23$.

Deshalb schreiben wir:

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \boxed{\sum_{i=0}^{n} i}\,.$$

Einige Schreibweisen

Indizierte Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i$$

- Das Zeichen Σ ist ein großes griechisches Sigma, das für „Summe“ steht.
- Die Schreibweise bedeutet, dass wir alle i von $i = 0$ bis $i = n$ aufsummieren sollen.
- Die Variable i ist ein Laufindex; wir könnten ebenso einen beliebigen anderen Buchstaben wählen.
- Die Summe der Zweierpotenzen von 2^0 bis 2^n: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i$.
- Ebenso schreibt man $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} \ldots$ für das indizierte Produkt.

Beispiele für Induktion

Summen von Quadratzahlen

Lemma
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis durch vollständige Induktion.

Induktionsstart: $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6}$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, das Lemma gilt für ein n. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+n) + (n+1)(6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}. \qquad \square$$

Beispiele für Induktion

Summen von Quadratzahlen

Problem: Die Formel ist vom Himmel gefallen! Wie kommt man darauf?

- Darauf gibt es keine einfache Antwort.
- Oft probiert man sehr viele n aus und versucht, ein Muster zu erkennen.
- In dem letzten Beispiel kann man als Ansatz ein Polynom der Form $an^3 + bn^2 + cn + d$ verwenden und durch Beispiele berechnen, welche Koeffizienten passen.

Beispiele für Induktion

Fakultäten

Definition

Das Produkt der Zahlen von 1 bis n bezeichnet man als n-Fakultät und schreibt dafür

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j.$$

$$\begin{aligned}
0! &= 1 \\
1! &= 1 \\
2! &= 1 \cdot 2 = 2 \\
3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\
4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \\
5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120
\end{aligned}$$

Beispiele für Induktion

Fakultäten

Fakultäten haben folgende kombinatorische Interpretation:

Lemma

Seien M und N zwei n-elementige Mengen. Dann gibt es genau $n!$ bijektive Abbildungen von M nach N.

Beweis durch Induktion.

Induktionsstart: Ist $n = 0$, so ist $M = N = \emptyset$. Es gibt genau eine Abbildung $f\colon \emptyset \to \emptyset$. Andererseits ist $0! = 1$.

Induktionsschritt: Seien $M = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$, $N = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$.

Die Menge aller Bijektionen $f\colon M \to N$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$\{f \mid f(\mu_1) = \nu_1\} \cup \{f \mid f(\mu_1) = \nu_2\} \cup \dots \cup \{f \mid f(\mu_1) = \nu_n\}$$

Beispiele für Induktion

Fakultäten

Lemma

Seien M und N zwei n-elementige Mengen. Dann gibt es genau $n!$ bijektive Abbildungen von M nach N.

$$\mathrm{Bij}(M,N) = \bigcup_{i=1}^{n} \{f \mid f(\mu_1) = \nu_i\}.$$

- Da die Mengen disjunkt sind, ist die Anzahl der Bijektionen von M nach N die Summe der Anzahlen der Elemente der Mengen $\{f \mid f(\mu_1) = \nu_i\}$:

$$\#\,\mathrm{Bij}(M,N) = \sum_{i=1}^{n} \#\{f \mid f(\mu_1) = \nu_i\}.$$

- Ist M eine Menge, so bezeichnet $\#M$ die Anzahl ihrer Elemente (falls es endlich viele sind).

Beispiele für Induktion
Fakultäten

Lemma
Seien M und N zwei n-elementige Mengen. Dann gilt $\#\,\mathrm{Bij}(M,N) = n!$.

$$\#\,\mathrm{Bij}(M,N) = \sum_{i=1}^{n} \#\{f \mid f(\mu_1) = \nu_i\}.$$

Die Schlüsselüberlegung ist nun:
Ist $f : M \to N$ eine Bijektion mit $f(\mu_1) = \nu_i$, so schränkt sich f zu einer Bijektion $M - \{\mu_1\} \to N - \{\nu_i\}$ ein.
Die Anzahl der f mit $f(\mu_1) = \nu_i$ ist also gleich der Anzahl der Bijektionen $\mathrm{Bij}(M - \{\mu_1\}, N - \{\nu_i\})$.

Beispiele für Induktion

Fakultäten

Lemma

Seien M und N zwei n-elementige Mengen. Dann gilt $\# \operatorname{Bij}(M, N) = n!$.

$$\# \operatorname{Bij}(M, N) = \sum_{i=1}^{n} \# \operatorname{Bij}(M - \{\mu_1\}, N - \{\nu_i\})$$

- Nun sind aber $M - \{\mu_1\}$ und $N - \{\nu_i\}$ jeweils Mengen mit $n-1$ Elementen.
- Also dürfen wir die Induktionsannahme verwenden:

$$\# \operatorname{Bij}(M - \{\mu_1\}, N - \{\nu_i\}) = (n-1)!.$$

- Wir erhalten:

$$\# \operatorname{Bij}(M, N) = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n! \qquad \square$$

Beispiele für Induktion

Fakultäten

Bemerkungen:

- Für die Beweisführung nützlich: M und N verschiedene Mengen.
- In der Praxis betrachtet man oft $M = N$.

Definition

Eine bijektive Abbildung $f: M \to M$ nennt man Permutation von M.

- Ist spezieller $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, so bezeichnet man $\mathrm{Bij}(M, M)$ als die symmetrische Gruppe und schreibt dafür $\mathfrak{S}_n$.

Korollar

$$\#\mathfrak{S}_n = n!$$

Beispiele für Induktion

Binomialkoeffizienten

Wir wollen eine weitere kombinatorisch definierte Zahl betrachten:

Definition

Sei $0 \leq k \leq n$. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge bezeichnen wir mit $\binom{n}{k}$ (lies: „n über k“). Diese Zahl nennt man auch einen Binomialkoeffizienten.

Beispiel

$\binom{4}{2} = 6$, denn die 2-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$ sind

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}.$$

Beispiele für Induktion

Binomialkoeffizienten

Lemma $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Wir wollen dies durch Induktion beweisen.
- Aber wählen wir n oder k als Induktionsvariable??
- Es ist einfacher, in n zu induzieren. Dies findet man durch probieren heraus.

Beispiele für Induktion

Binomialkoeffizienten

Lemma
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n = 0$. Da $0 \leq k \leq n$, ist auch $k = 0$.
Die leere Menge hat genau eine 0-elementige Teilmenge (die leere Menge). Also ist $\binom{0}{0} = 1$.
Andererseits ist auch $\frac{0!}{0!(0-0)!} = 1$.

Induktionsschritt: Betrachten wir o.B.d.A. die Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n+1\}$.

- o.B.d.A = „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“: Wir betrachten einen Spezialfall, der aber die Gültigkeit des Arguments für die Allgemeinheit nicht einschränkt.

Beispiele für Induktion

Binomialkoeffizienten

Lemma
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Induktion nach n.

Es gibt zwei Arten von k-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n+1\}$:

- die, die $n+1$ nicht enthalten: davon gibt es $\binom{n}{k}$.
- die, die $n+1$ enthalten: davon gibt es $\binom{n}{k-1}$.
- Falls $k = 0$, ist $\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!(n-0)!}$, diesen Fall können wir also vorab behandeln.

Also gilt $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, falls $k > 0$.

Beispiele für Induktion

Binomialkoeffizienten

Lemma

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Induktion nach n.

Mit der Induktionsannahme folgern wir:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n+1-k)!} + \frac{n!k}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \qquad \square
\end{aligned}$$

Aufgaben

Bitte bis Donnerstag, den 13. 9. bearbeiten!

1. Finden und beweisen Sie eine Formel für die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen.
2. Beweisen Sie folgende Formel durch vollständige Induktion:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$