Vorkurs Mathematik 2007

Vorlesung 2

Tilman Bauer

Universität Münster

6. September 2007

Organisatorisches

Meine Koordinaten:	tbauer@uni-muenster.de
	Zimmer 504, Einsteinstr. 62 (Hochhaus)
Sprechstunden:	Di 13:30-14:30
	Do 9:00-10:00

- für alle Fragen, die Sie nicht mit Ihrem Übungsleiter besprechen wollen/können

Homepage des Vorkurses Mathematik:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/tbauer/vorkurs2007`

- Dort liegen diese Folien, die Aufgaben und sonstige Informationen!

Mengen und Abbildungen

Der (naive) Begriff der Menge

Georg Cantor (1895):

> *Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

- Eine Menge M wird dadurch definiert, indem man angibt, welche Dinge zu ihr gehören. Diese Dinge heißen Elemente.
- Ist x ein Element einer Menge M, so schreiben wir: $x \in M$.

Mengen und Abbildungen

Der (naive) Begriff der Menge

- Eine Menge kann ein Ding nicht mehrfach enthalten. Entweder sie enthält es oder nicht.
- Enthält eine Menge nur endlich viele Elemente, so können wir eine Liste aller ihrer Elemente aufschreiben.

Beispiel

{Hauke, Tanja, Olaf} bezeichnet die Menge, deren Elemente Hauke, Tanja und Olaf sind, und keine weiteren.

- Die Reihenfolge ist unerheblich: Die Mengen {Hauke, Tanja, Olaf} und {Tanja, Olaf, Hauke} sind gleich.
- Auch {Tanja, Olaf, Tanja, Hauke, Hauke} bezeichnet die gleiche Menge.

Mengen und Abbildungen

Konstruktion von Mengen

- Hat eine Menge nicht nur endlich viele Elemente, so kann man sie nicht durch Aufzählen ihrer Elemente hinschreiben.
- In diesem Fall hilft uns die Prädikatenlogik: Ist $P(x)$ ein Prädikat von einer Variablen x, so bezeichnet

  $$\{x \mid P(x)\} \quad \text{oder} \quad \{x \colon P(x)\}$$

  die Menge, die genau die x enthält, für die $P(x)$ wahr ist.

Beispiel

Wählen wir als Universum die natürlichen Zahlen. Dann ist $\{x \mid x \text{ ist prim}\}$ die Menge aller Primzahlen.

Mengen und Abbildungen

Beispiele von unendlichen Mengen

Es gibt folgende Standardbezeichnungen für Zahlenmengen:

$\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ die ganzen Zahlen $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ die rationalen Zahlen oder Brüche

$\mathbb{R}$ die reellen Zahlen

- Wie diese Mengen konstruiert werden, werden wir später noch sehen.

Beispiel

Intervalle sind zusammenhängende Bereiche von reellen Zahlen:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$(a,\ b \in \mathbb{R})$

Mengen und Abbildungen

Beispiele von unendlichen Mengen

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$
$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

- Diese Mengen unterscheiden sich lediglich dadurch, welche der beiden Randpunkte enthalten sind.

Die leere Menge $\{\}$ bezeichnen wir auch mit $\emptyset$. Diese Menge hat keine Elemente.

Mengen und Abbildungen

Mengenoperationen

Sind M und N Mengen, so können wir folgende neue Mengen konstruieren:

Die Vereinigung $M \cup N$. Dies ist die Menge aller Elemente, die in M oder in N sind. In Formeln:

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}.$$

Die Schnittmenge $M \cap N$. Dies ist die Menge aller Elemente, die in M und in N sind. In Formeln:

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}.$$

Die Differenzmenge $M - N$. Dies ist die Menge aller Elemente, die in M und nicht in N sind. In Formeln:

$$M - N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}.$$

Mengen und Abbildungen

Mengenoperationen

Aus diesen Definitionen von $\cup$ und $\cap$ folgt sofort:

$$x \in M \cup N \iff x \in M \vee x \in N$$
$$x \in M \cap N \iff x \in M \wedge x \in N$$

- So kann man sich merken, wie herum die Symbole $\cap$, $\cup$, $\vee$, $\wedge$ gehören.

Mengen und Abbildungen

Mengenoperationen

Beispiel

Sei $M = \{\text{Hauke, Tanja, Olaf}\}$ und $N = \{\text{Tanja, Albrecht, Linda}\}$. Dann ist

- $M \cup N = \{\text{Hauke, Olaf, Albrecht, Linda, Tanja}\}$
- $M \cap N = \{\text{Tanja}\}$
- $M - N = \{\text{Hauke, Olaf}\}$
- $N - M = \{\text{Albrecht, Linda}\}$.

Beispiel

- $[0, 2] \cap [1, 18] = [1, 2]$
- $[0, 2] - [1, 18] = [0, 1[$
- $[0, 2] \cup [1, 18] = [0, 18]$.

Mengen und Abbildungen

Teilmengen und Obermengen

Definition

Eine Menge M ist Teilmenge einer Menge N ($M \subseteq N$), falls jedes Element von M auch ein Element von N ist. Also

$$M \subseteq N \iff \forall x \colon (x \in M \Rightarrow x \in N).$$

Umgekehrt nennen wir N dann eine Obermenge von M.
Wir nennen zwei Mengen gleich ($M = N$), wenn sie die gleichen Elemente besitzen:

$$M = N \iff \forall x \colon (x \in M \iff x \in N)$$

Dies ist äquivalent zu $(M \subseteq N) \wedge (N \subseteq M)$.
Wir nennen zwei Mengen M, N disjunkt, falls $M \cap N = \emptyset$ gilt.

Mengen und Abbildungen

Potenzmengen

Betrachten wir die Gesamtheit aller Teilmengen einer Menge M.
Diese bilden wiederum eine Menge, die man als **Potenzmenge** von M bezeichnet:

$$\mathcal{P}(M) = \{N \mid N \subseteq M\}.$$

$$\mathcal{P}(\{\text{Tim, Struppi}\}) = \{\emptyset, \{\text{Tim}\}, \{\text{Struppi}\}, \{\text{Tim, Struppi}\}\}.$$

- Warum „Potenzmenge“? Wenn M endlich viele Elemente besitzt (sagen wir n), so hat $\mathcal{P}(M)$ 2^n Elemente.
- Deshalb schreibt man auch manchmal 2^M statt $\mathcal{P}(M)$ für die Potenzmenge.

Mengen und Abbildungen

Abbildungen von Mengen

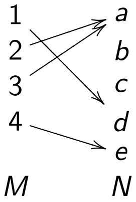
Seien M, N zwei Mengen.

Definition

Eine Abbildung von M nach N (auch Funktion oder Morphismus genannt) ist eine Vorschrift, die jedem Element von M genau ein Element von N zuordnet.

Beispiel

Für endliche Mengen kann man eine Abbildung durch ein Pfeildiagramm darstellen: Ist $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{a, b, c, d, e\}$, so bezeichnet folgendes eine Abbildung von M nach N:



Mengen und Abbildungen
Abbildungen von Mengen

Die Eigenschaft, eine Abbildung zu sein, zeichnet sich in dem Pfeildiagramm durch folgende Bedingung aus:

- Auf der linken Seite geht von jedem Element ein und nur ein Pfeil ab.

Wenn man einer Abbildung von M nach N einen Namen gibt, etwa f, so schreibt man

$$f : M \to N,$$

um anzudeuten, dass f eine solche Abbildung ist.

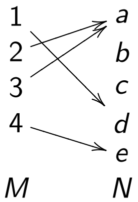
Mengen und Abbildungen

Abbildungen von Mengen

Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

- Man bezeichnet M als Definitionsbereich und N als Wertebereich oder Zielbereich von f.
- Ist $m \in M$ ein Element, so schreiben wir $f(m)$ für das Element in N, das f m zuordnet.
- Man nennt $f(m)$ das Bild von m.
- Man nennt m ein Urbild von $f(m)$.
- Das Bild ist eindeutig bestimmt, aber es kann mehrere Urbilder zu einem $n \in N$ geben!

Beispiel



$$f(1) = d$$
$$f(2) = a$$
$$f(3) = a$$
$$f(4) = e$$

- Bei unendlichen Mengen M und N kann man natürlich wiederum keine vollständige Liste der Werte angeben. Stattdessen kann man eine Formel angeben, z.B. für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^{15} + \frac{3}{4}\sin(e^x)$$

Hilberts Grand Hotel

Ein Zwischenspiel

- Stellen wir uns ein Hotel vor, das unendlich viele Zimmer hat, die mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert sind.
- $G = \{\text{Hauke, Tanja, Olaf, } \dots\}$ ist eine Menge von Gästen, die gerne in dem Hotel schlafen wollen.
- Um den Gästen Zimmer zuzuweisen, brauchen wir eine Abbildung $f\colon G \to \mathbb{N}$: Gast $g \in G$ wird in Zimmer Nummer $f(g)$ gesteckt.
- Z.B.: $f(\text{Hauke}) = 12,\ f(\text{Tanja}) = 7, \dots$.
- Die Gäste würden es lieber mögen, wenn jeder sein eigenes Zimmer hat. Ist also $g \neq g'$ für zwei Gäste $g,\ g' \in G$, so soll $f(g) \neq f(g')$ gelten.
- Wir wollen eine solche Abbildung eine Hotelabbildung nennen.

Hilberts Grand Hotel

Ein Zwischenspiel

- Nehmen wir an, das Hotel ist voll belegt. Sicher kann man dann keinen weiteren Gast mehr unterbringen?
- Falsch! Der Hotelmanager weist einfach alle Gäste an, in das nächsthöhere Zimmer umzuziehen. Dadurch wird Zimmer 0 frei für den neuen Gast.
- Mathematisch: Ist $f\colon G \to \mathbb{N}$ eine Hotelabbildung, und $g_0 \notin G$, so erhalten wir eine neue Hotelabbildung $f'\colon G \cup \{g_0\} \to \mathbb{N}$ durch $f'(g_0) = 0$ und $f'(g) = f(g) + 1$ für $g \in G$.
- Paradox von Hilberts Hotel, nach dem Mathematiker David Hilbert (1862-1943)

Hilberts Grand Hotel

Ein Zwischenspiel

Wir wollen dieses Gedankenspiel noch etwas weiter treiben.

- Angenommen, Hilberts Hotel ist wieder voll belegt, und es kommt nicht nur ein, sondern unendlich viele neue Gäste $g_0, g_1, \dots$ an, die untergebracht werden wollen.
- Auch das ist möglich! Der Manager weist jeden Gast an, seine Zimmernummer zu verdoppeln.
- Nun sind alle ungeraden Zimmer frei geworden für die neuen Gäste – unendlich viele.
- Mathematisch: Ist $f\colon G \to \mathbb{N}$ die ursprüngliche Hotelabbildung und $\{g_0, g_1, \dots\}$ die Menge der neuen Gäste, so definiere $f'(g) = 2f(g)$, falls $g \in G$ ist, und $f(g_i) = 2i + 1$ für $i \in \mathbb{N}$.

Hilberts Grand Hotel

Ein Zwischenspiel

Was will uns dieses Gedankenspiel sagen?

- Eine unendliche Teilmengen einer unendlichen Mengen (die geraden Räume) ist deshalb nicht unbedingt „kleiner“.
- Umgekehrt: eine unendliche Menge (die Gäste) wird nicht unbedingt „größer“, wenn man sie mit einer anderen unendlichen Menge vereinigt.
- Unendliche Mengen sind brandgefährlich!

Hilberts Grand Hotel

Ein noch sonderbareres Paradox

- Seit kurzem herrscht in Hilberts Hotel absolutes Rauchverbot. Die Gäste dürfen noch nicht einmal Zigaretten mit in das Hotel bringen.
- Dennoch hat jeder Gast eine Zigarette. Wie geht das?
- Der Gast in Zi. 1 gibt dem Gast in Zi. 0 eine Zigarette.
- Der Gast in Zi. 2 gibt dem Gast in Zi. 1 zwei Zigaretten.
- Der Gast in Zi. 3 gibt dem Gast in Zi. 2 drei Zigaretten.
- usw.
- Somit hat jeder Gast eine Zigarette.
- Warum ist das ein Fehlschluss?

Mengen und Abbildungen

Eigenschaften von Abbildungen

Hotelabbildungen hatten die besondere Eigenschaft

$$\forall x,\ y\colon x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Ist dies für eine Abbildung erfüllt, so sagt man, die Funktion sei injektiv oder eineindeutig.
Wenn eine Funktion $f\colon M \to N$ jeden Wert $n \in N$ annimmt, so nennt man die Funktion surjektiv. In Formeln: f ist surjektiv, falls

$$\forall n \in N \exists m \in M\colon f(m) = n.$$

Am Beispiel der Hotelabbildung hieße das: alle Zimmer sind belegt.
Eine Funktion, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, nennt man bijektiv.

Mengen und Abbildungen

Eigenschaften von Abbildungen

Beispiel

Betrachten wir einige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch Formeln gegeben sind.

$f(x) = x + 1$: diese Funktion ist bijektiv, denn

1. $x \neq y \Rightarrow x + 1 \neq y + 1$, also injektiv
2. Für $y \in \mathbb{R}$ gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$, nämlich $x = y - 1$.

$f(x) = x^2$: diese Funktion ist weder injektiv noch surjektiv, denn

1. $f(1) = f(-1)$, also nicht injektiv
2. Es gibt kein x mit $f(x) = x^2 = -1$, also nicht surjektiv.

Mengen und Abbildungen

Eigenschaften von Abbildungen

Beispiel

Gibt es ein $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, das injektiv, aber nicht surjektiv ist?
Ja, zum Beispiel $f(x) = 2^x$ (Übung).

Definition

Die Menge aller Werte, die eine Abbildung $f\colon M \to N$ annimmt, nennt man das Bild von f und schreibt dafür $\mathrm{im}(f)$.

$$\mathrm{im}(f) = \{n \in N \mid \exists m \in M\colon f(m) = x\} = \{f(m) \mid m \in M\}.$$

- Also ist eine Abbildung genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{im}\, f = N$ gilt.

Definition

Gegeben sei eine Abbildung $f\colon M \to N$ und eine Abbildung $g\colon N \to M$.
Wir nennen g eine Umkehrabbildung von f, falls $g(f(m)) = m$ für alle $m \in M$ und $f(g(n)) = n$ für alle $n \in N$ gilt.

Lemma

1. *Eine Abbildung $f\colon M \to N$ hat genau dann eine Umkehrabbildung, wenn sie bijektiv ist.*
2. *Sind g, g' zwei Umkehrabbildungen von f, so muss schon $g = g'$ gelten.*

Mengen und Abbildungen

Umkehrabbildungen

Eine Abbildung $f\colon M \to N$ hat genau dann eine Umkehrabbildung, wenn sie bijektiv ist.

Beweis.

- „⇒“: Nehmen wir an, f hat eine Umkehrabbildung g.
- Dann ist f surjektiv, denn zu $n \in N$ gilt $f(m) = n$, wenn $m = g(n)$ gewählt wird.
- f ist auch injektiv, denn falls $f(m) = f(m')$ ist, so ist auch $g(f(m)) = g(f(m'))$, also $m = m'$.
- „⇐“ Nehmen wir nun an, f ist bijektiv.
- Definiere $g(n)$ als dasjenige $m \in M$, so dass $f(m) = n$ gilt.
- g ist wohldefiniert, denn ein solches m gibt es (f ist surjektiv) und es ist eindeutig (f ist injektiv).

□

Mengen und Abbildungen

Umkehrabbildungen

Sind g, g' zwei Umkehrabbildungen von f, so muss schon $g = g'$ gelten.

Beweis.

- Seien g und g' zwei Umkehrabbildungen von f. Wir müssen zeigen:

$$\text{Für alle } n \in N \text{ gilt: } g(n) = g'(n).$$

- Sei also $n \in N$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g(n) &= g(f(g'(n))) && (\text{denn } f(g'(n)) = n) \\ &= g'(n) && (\text{denn } g(f(m)) = m \text{ für alle } m) \end{aligned}$$

□

Mengen und Abbildungen
Umkehrabbildungen

Das Lemma zeigt, dass es zu jeder bijektiven Abbildung f eine eindeutige Umkehrabbildung gibt.
Diese nennen wir f^{-1}.

- Achtung! f^{-1} hat nichts mit der Abbildung zu tun, die x auf $\frac{1}{f(x)}$ abbildet, auch wenn man diese ebenfalls mit f^{-1} bezeichnen könnte.

Mengen und Abbildungen

Bilder und Urbilder von Mengen

Sei wieder $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

- Ist $K \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist $f(K)$ die Menge der Bilder aller $k \in K$:

$$f(K) = \{f(k) \mid k \in K\} = \{n \in N \mid \exists k \in K\colon f(k) = n\}.$$

- Ist $L \subseteq N$ eine Teilmenge, so ist $f^{-1}(L)$ die Menge aller Urbilder aller $l \in L$:

$$f^{-1}(L) = \{m \in M \mid f(m) \in L\}.$$

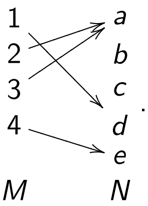
- Dieses f^{-1} hat eine etwas andere Bedeutung als die der Umkehrfunktion!
- Insbesondere muss f nicht bijektiv sein, damit wir $f^{-1}(L)$ bilden können!

Mengen und Abbildungen

Bilder und Urbilder von Mengen

Beispiel

f sei gegeben durch



.

- $f(\{1,2\}) = \{a,d\}$
- $f(\{1,2,3,4\}) = \{a,d,e\}$
- $f^{-1}(\{a,e\}) = \{2,3,4\}$
- $f^{-1}(\{a,b,c\}) = \{2,3\}$
- $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset.$

Aufgaben

Bitte bis Dienstag, den 11. September bearbeiten!

1. Beweisen Sie, dass für Mengen M und N gilt:

$$(M - N) \cup (N - M) = (M \cup N) - (M \cap N)$$

   Fertigen Sie eine Zeichnung an, um sich die Aussage zu verdeutlichen.

2. Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist, und beweisen Sie es. Sie können z.B. $f(x) = 2^x$ wählen.
3. Bestimmen Sie eine bijektive Funktion und ihre Umkehrfunktion zwischen den Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.