Übungen zur homologischen Algebra und Gruppenkohomologie

— Lösungen zu Blatt 4 —

Tilman Bauer 30. November 2004

Übung 1 (Yoneda Ext, Teil 1). Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie und M, N zwei Objekte. Betrachte für $n \geq 1$ die Mengen von exakten Sequenzen

$$\mathrm{Ex}^n(M,N) = \{0 \to N \to X_{n-1} \to X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0\}/\sim,$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die erzeugt wird von $E \sim E'$, wenn es eine (Leiter-) Abbildung $E \to E'$ gibt, die auf den M- und N-Einträgen die Identität ist. Zeige, dass Ex^n ein Funktor $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ ist. Tipp: Ist $E = (0 \to N \to X_\bullet \to M \to 0) \in \mathrm{Ext}^*(M,N)$, $f\colon M' \to M$, und $g\colon N \to N'$ so definiere

$$f^*E\colon 0 \to N \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \times_M M' \to M' \to 0$$

und

$$g_*E\colon 0 \to N' \to X_{n-1} \sqcup_N N' \to X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0.$$

Hierbei bezeichnet $\times_M$ das Pullback über M und $\sqcup_N$ das Pushout unter N. Was geschieht für $n = 1$?

Zunächst zeigen wir, dass f^* nicht vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse abhängt. Sei also

$$\begin{array}{ccccccccc} E\colon 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_\bullet & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ E'\colon 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X'_\bullet & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

eine elementare Äquivalenz von exakten Sequenzen und $f\colon M' \to M$ ein Morphismus. Dann erhalten wir eine kanonische Abbildung $X_0 \times_M M' \to X'_0 \times_M M'$, die zusammen mit den anderen Abbildungen $X_i \to X'_i$ eine elementare Äquivalenz zwischen f^*E und f^*E' liefert. Das duale Argument funktioniert für g_*.

Nun zur Funktorialität: seien $M_2 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_0} M_0$ zwei Morphismen; es ist zu zeigen, dass $(f_0 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_0^*$. Dies folgt sofort aus dem kanonischen Isomorphismus

$$(X_0 \times_{M_0} M_1) \times_{M_1} M_2 \cong X_0 \times_{M_0} M_2.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass $f^*g_* = g_*f^*$ ist für $f\colon M' \to M$ und $g\colon N \to N'$. Das ist klar für $n > 2$, da die beiden Funktoren dann auf verschiedenen Teilen der exakten Sequenz operieren. Aber für $n = 1$ müssen wir zeigen, dass es einen Isomorphismus

$$(X \times_M M') \sqcup_N N' \cong (X \sqcup_N N') \times_M M'$$

gibt, der eine Äquivalenz der Sequenzen $f^*g_*Eundg_*f^*E$ erzeugt. Beide Seiten sind aber gleich der abelsche Gruppe

$$\frac{\{(x, m', n') \mid x \in X,\ m' \in M',\ n \in N',\ f(m') = d(x)\}}{(d(n)x, m', n') \sim (x, m', g(n))} \quad (n \in N),$$

wobei d die Morphismen in der exakten Sequenz $0 \to N \to X \to M \to 0$ bezeichnet.

Übung 2 (Yoneda Ext, Teil 2). Zeige, dass $\mathrm{Ex}^n(M, N)$ eine abelsche Gruppe bezüglich der folgenden Operation ist: Seien $E, E' \in \mathrm{Ex}^n(M, N)$. Dann definiere

$$E + E' \colon 0 \to N \to X_{n-1} \sqcup_N X'_{n-1} \to X_{n-2} \oplus X'_{n-2} \to \cdots \to X_1 \oplus X'_1 \to X_0 \times_M X'_0 \to M \to 0.$$

Zeige, dass $E + E' \in \mathrm{Ex}^n(M, N)$, und dass dies eine abelsche Gruppenstruktur auf $\mathrm{Ex}^n(M, N)$ definiert. Gib einen expliziten Repräsentanten für das Nullelement an. Achte wiederum auf den Spezialfall $n = 1$.

Im Fall $n = 1$ müssen wir den mittleren Term von $E + E'$ definieren als

$$\{(x, x') \in X \oplus X' \mid d(x) = d(x')\}/(d(n)x, x') \sim (x, d(n)x') \quad (n \in N).$$

Zunächst zeigen wir die Exaktheit von $E + E'$. Exaktheit bei N und M ist klar, und auch bei den mittleren (direkten Summen-) Gruppen. Zur Exaktheit bei $X_0 \times_M X'_0$: Der Kern von $X_0 \times_M X'_0$ ist genau $\ker(X_0 \to M) \times \ker(X'_0 \to M) = \mathrm{im}(X_1 \oplus X'_1)$. Die Exaktheit bei $X_{n-1} \sqcup_N X'_{n-1}$ folgt dual.

Um die abelsche Gruppenstruktur zu definieren, brauchen wir zunächst ein neutrales Element; dieses ist gegeben durch

$$0 \to N \to N \to 0 \to \cdots \to M \to M \to 0$$

bzw. (für $n = 1$) durch die zerfallende kurze exakte Sequenz.

Die Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation ist aus der Definition sofort ersichtlich; wir müssen nun noch Inverse konstruieren. Dies verschieben wir einfach auf die nächste Übung, wo wir zeigen, dass Ex^n als Monoid isomorph zu einer Gruppe ist.

Übung 3 (Yoneda Ext, Teil 3). Habe $\mathcal{C}$ genug Projektive und sei $P_\bullet \to M$ eine projektive Auflösung von M. Sei $E \in \mathrm{Ex}^n(M,N)$. Dann hat das Hochhebungsproblem

$$\begin{tikzcd}
& \cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E\colon & & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

eine Lösung, und wir erhalten ein Element

$$\phi(E) \in \ker(\mathrm{Hom}(P_n, N) \to \mathrm{Hom}(P_{n+1}, N)) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^n(M,N).$$

Zeige, dass $\phi(E) \in \mathrm{Ext}^n(M,N)$ wohldefiniert ist, und dass $\phi\colon \mathrm{Ex}^n(M,N) \to \mathrm{Ext}^n(M,N)$ ein Isomorphismus von abelschen Gruppen ist.

Das Fundamentallemma garantiert eine Lösung $f\colon P_n \to N$, die eindeutig bis auf Homotopie ist. Das heißt, jede weitere Lösung ist von der Form $f + H \circ d$, wobei $H\colon P_{n-1} \to N$ Teil einer Kettenhomotopie ist. Also ist die Klasse von f in $H^n(\mathrm{Hom}(P_\bullet, N)) = \mathrm{Ext}^n(M,N)$ wohldefiniert, wenn wir zeigen können, dass sie invariant unter der Äquivalenzrelation in Ex ist. Ist aber $E \to E'$ eine elementare Äquivalenz, so können wir die Hochhebung $P_\bullet \to E'$ so wählen, dass es die Hochhebung von $P_\bullet \to E$ ist, gefolgt von der Abbildung $E \to E'$. Da diese die Identität auf N ist, erhalten wir das gleiche Element in Ext^n.

Ist umgekehrt $f\colon P_n \to N$ ein Repräsentant eines Elementes von $\mathrm{Ext}^n(M,N)$, so können wir daraus eine exakte Sequenz

$$0 \to N \to N \sqcup_{P_n} P_{n-1} \to P_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

basteln. Es ist klar, dass die Komposition Ext $\to$ Ex $\to$ Ext die Identität ist; die andere Richtung ist gegeben durch das folgende Diagramm, das eine Äquivalenz in Ex anzeigt:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & N \sqcup_{P_n} P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "{(d, f_{n-1})}"] & P_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-2}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "d"] & X_{n-1} \arrow[r, "d"] & X_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Es ist klar, dass die Null in Ex^n auf die Null in Ext^n abgebildet wird (wir können als Hochhebung auf P_n den Nullmorphismus wählen). Wir müssen nun noch zeigen, dass die Bijektion zwischen Ext^n und Ex^n die Addition respektiert. Dazu beobachten wir zunächst, dass wir die Addition in Ext^n wir folgt charakterisieren können: Ist $\Delta\colon N \to N \oplus N$ die Diagonalabbildung und $\Sigma\colon N \oplus N \to N$ die Summenabbildung, so ist

$$f + g\colon \ \mathrm{Ext}(M, N) \oplus \mathrm{Ext}(M, N) \to \mathrm{Ext}(M \oplus M, N \oplus N) \xrightarrow{\Sigma_*\Delta^*} \mathrm{Ext}(M, N).$$

Ebenso gilt in Ex^n:

$$E + E' \cong \Sigma_*\Delta^*(E \oplus E'),$$

wobei $E \oplus E'$ die direkte Summensequenz von $N \oplus N$ nach $M \oplus M$ ist. Wählen wir eine projektive Auflösung von M, so können wir in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \cdots \arrow[r] & P_n \oplus P_n \arrow[r] \arrow[d, "(f,f')"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \oplus P_0 \arrow[r] \arrow[d, "(f,f')"] & M \oplus M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E \oplus E' \colon & & N \oplus N \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_0 \oplus X_0' \arrow[r] & M \oplus M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

die Hochhebung als die direkt Summe der Hochhebungen definieren, die zu E bzw. E' gehören; damit ist die Additivität gezeigt.

Übung 4 (Yoneda-Produkt). Ist $E \in \mathrm{Ex}^n(M, N)$, $E' \in \mathrm{Ex}^m(Q, M)$, so definiere $EE' \in \mathrm{Ex}^{n+m}(Q, N)$ durch die Erweiterung

$$0 \to N \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to X'_{m-1} \to \cdots \to X'_0 \to Q,$$

wobei die mittlere Abbildung die Komposition $X_0 \to M \to X'_{m-1}$ ist. Zeige, dass dies eine wohldefinierte bilineare assoziative Multiplikation ist. Achte besonders auf den Fall, wo $m = 0$ oder $n = 0$ ist, wobei wir $\mathrm{Ex}^0(M, N) = \mathrm{Hom}(M, N)$ setzen.

Für m und $n > 0$ erhalten wir nach Konstruktion wieder eine exakte Sequenz, und die Assoziativität ist sofort klar. Ebenso die Wohldefiniertheit, denn zwei elementare Äquivalenzen können zu einer Äquivalenz des Produktes zusammengeklebt werden.

Wir definieren $\mathrm{Ex}^0(M, N)$ sinnvollerweise als $\mathrm{Hom}(M, N)$; die Multiplikation $\mathrm{Ex}^0 \times \mathrm{Ex}^0$ ist dann einfach Komposition, und $\mathrm{Ex}^0 \times \mathrm{Ex}^n$ bzw. $\mathrm{Ex}^n \times \mathrm{Ex}^0$ sind,was wir vorher mit f^* und f_* bezeichnet hatten. Die Assoziativität entspricht dann genau der Funktorialität von Ex^n.