Übungen zur homologischen Algebra und Gruppenkohomologie

— Lösungen zu Blatt 3 —

Tilman Bauer 11. November 2004

Übung 1 (Fünferlemma). In einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$ sei folgendes kommutatives Diagramm gegeben:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & M_5 \arrow[d, "\cong"] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5. \end{tikzcd}$$

Zeige, dass dann auch der mittlere Morphismus ein Isomorphismus ist. Welche Bedingungen braucht man genau an die anderen senkrechten Pfeile, um zu schließen, dass der mittlere Morphismus ein Monomorphismus (Epimorphismus) ist?

Wir führen die Diagrammjagd zur Vereinfachung mit Elementen durch. Zunächst zur Surjektivität. Sei $n \in N_3$ ein Element. Da $M_4 \to N_4$ **epi** ist, gibt es ein Urbild m_4 vom Bild von n in N_4. Dieses m_4 geht unter $M_4 \to M_5 \to N_5$ nach 0, also, weil $M_5 \to N_5$ **mono** ist, schon in M_5 nach 0. Wegen der Exaktheit der oberen Zeile gibt es also ein Urbild m_3 von m_4. m_3 wird nicht unbedingt auf n abgebildet, aber die Differenz geht auf Null in N_4, also müssen wir jetzt nur noch Urbilder von Elementen $n \in N_3$ finden, die im Kern von $N_3 \to N_4$ liegen. Solch ein Element hat ein eindeutiges Urbild in N_2, und, weil $M_2 \to N_2$ **surjektiv** ist, ein Urbild in M_2, dessen Bild in M_3 Urbild von n ist. Die Injektivität folgt durch Übergang zur dualen Kategorie — hier brauchen wir, dass $M_2 \to N_2$ und $M_4 \to N_4$ mono sind und $M_2 \to N_2$ epi.

Übung 2 (Der Bockstein). Sei R ein Ring und $r \in R$. Ist M ein R-Modul, so gibt es eine kurze exakte Sequenz $0 \to M \xrightarrow{r} M \xrightarrow{p} M/r \to 0$. Ist N ein R^{op}-Modul, so erhalten wir also eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_n^R(N,M) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Tor}_n^R(N,M/r) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N,M) \xrightarrow{r_*} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N,M) \to \cdots .$$

Der *Bockstein-Homomorphismus* ist definiert als

$$\beta\colon \mathrm{Tor}_n^R(N,M/r) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N,M/r); \quad \beta = p_* \circ \partial$$

und ist eine natürliche Transformation von $\mathrm{Tor}_n^R(-,M/r)$ nach $\mathrm{Tor}_{n-1}^R(-,M/r)$. Sei p eine Primzahl und $R = \mathbf{Z}[t]/(t^p - 1)$ Bestimme die Torsionsgruppen $\mathrm{Tor}_R(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p)$ sowie den Bockstein für $r = p \in R$.

Die Torsionsgruppen $\mathrm{Tor}_i^R(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p) = H_i(C_p; \mathbf{Z}/p) = \mathbf{Z}/p$ und

$$\mathrm{Tor}_i^R(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = H_i(C_p; \mathbf{Z}/p) = \begin{cases} \mathbf{Z}; & i = 0 \\ \mathbf{Z}/p; & 2 \nmid i \\ 0; & 2 \mid i \end{cases}$$

wurden schon in der Vorlesung berechnet. Aus der Standardauflösung von $\mathbf{Z}$ über R erkennt man sofort, dass p_* injektiv in positiven Graden und r_* null ist. Aus der langen exakten Sequenz können wir nun ∂ berechnen, ohne auf die Definition mit Hilfe des Schlangenlemmas zurückzugreifen. Schreibe dazu $T_n M = \mathrm{Tor}_n^R(\mathbf{Z}, M)$:

$$\begin{tikzcd}
T_{2i}\mathbf{Z} \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, equal] & T_{2i}\mathbf{Z}/p \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & T_{2i-1}\mathbf{Z} \arrow[r, "r_*"] \arrow[d, equal] & T_{2i-1}\mathbf{Z} \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, equal] & T_{2i-1}\mathbf{Z}/p \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & T_{2i-2}\mathbf{Z} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/p \arrow[r] & \mathbf{Z}/p \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/p \arrow[r] & \mathbf{Z}/p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bezeichnet $x_n \in T_n\mathbf{Z}/p$ geeignete Erzeuger, so ist also

$$\beta(x_n) = \begin{cases} x_{n-1}; & 2 \mid n,\ n > 0 \\ 0; & \text{sonst.} \end{cases}$$

Übung 3 (Dimensionsverschiebung). Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein rechtsexakter Funktor von abelschen Kategorien. Gegeben sei eine exakte Sequenz

$$0 \to K \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

in $\mathcal{C}$, wobei alle P_i projektiv sind. Zeige, dass dann gilt:

$$L_iF(M) \cong L_{i-n}F(K) \quad \text{für alle } i > n.$$

Insbesondere gilt $L_iF = 0$ für alle i, falls $L_1F = 0$.

Per Induktion genügt es, die Aussage für $n = 1$ zu zeigen. Sei also $0 \to K \to P \to M \to 0$ eine exakte Sequenz mit projektivem P. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L_iF(P) \arrow[r] \arrow[d, equal] & L_iF(M) \arrow[r, "\partial"] & L_{i-1}F(K) \arrow[r] & L_{i-1}F(P) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& 0 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Also liefert $\partial\colon L_iF(M) \to L_{i-1}F(K)$ den gewünschten Isomorphismus.

Übung 4 (Selbstinjektive Ringe). Sei k ein Körper und G eine Gruppe. Zeige, dass die Klasse der injektiven und die Klasse der projektiven $k[G]$-Moduln übereinstimmen (ein solcher Ring heißt selbstinjektiv). Gib ein Beispiel, wo das nicht der Fall ist, wenn k kein Körper ist, sondern nur ein Ring, und eines, wo G keine Gruppe, sondern nur ein Monoid ist.

Ups! Wir müssen annehmen, dass G endlich ist.

Die Gegenbeispiele sind schnell angegeben: Für die triviale Gruppe und $k = \mathbf{Z}$ ist $k[G] = \mathbf{Z}$ frei, also projektiv, aber nicht injektiv; genauso für einen beliebigen Körper k und das Monoid $G = \{1, e \mid e^2 = e\}$, denn dann ist $k[G] = k[t]/(t^2 - t)$. Wählen wir $M \cong k$ als $k[G]$-Modul, so dass $t.m = 0$ für alle t gilt, so hat die Inklusion $k \to k[G]$, die 1 auf t schickt, keine Retraktion, also ist $k[G]$ nicht injektiv über sich selbst.

Sei nun $R = k[G]$. Da k also eindimensionaler Modul injektiv über sich selbst ist, ist auch $R^* = \mathrm{Hom}_k(R, k)$ injektiv als R-Modul, wobei die Operation definiert ist durch $(g.f)(x) = f(g^{-1}x)$. Wir zeigen, dass $R^* \cong R$ ist und daher alle endlich erzeugten projektiven R-Moduln ebenfalls injektiv sind. Definiere $\phi\colon R^* \to R$ durch

$$\phi(f) = \sum_{g \in G} f(g) g.$$

Diese Abbildung ist eine R-Modulabbildung. Sie ist surjektiv, denn ein Urbild von $g \in R$ ist gegeben durch δ_g mit $\delta_g(g') = \delta_{gg'}$. Also ist sie ein Isomorphismus.

Die Verallgemeinerung, dass auch die Klassen der nicht notwendig endlich erzeugten projektiven und injektiven Moduln übereinstimmen, ist ein Satz von Faith und Walker [FW67] und soll hier nicht behandelt werden.

Literatur

[FW67] Carl Faith and Elbert A. Walker. Direct-sum representations of injective modules. *J. Algebra*, 5:203–221, 1967.