Übungen zur homologischen Algebra und Gruppenkohomologie

— Lösungen zu Blatt 2 —

Tilman Bauer 5. November 2004

Übung 1 (Partiell geordnete Mengen). Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, aufgefasst als Kategorie. Wann sind in X Produkte und Koprodukte definiert, und wie lassen sie sich explizit beschreiben?

Das Produkt einer Familie $x_i \in X$ ist das Infimum, d. h. ein Element $\inf x_i$ mit $\inf x_i \leq x_i$ für alle i, so dass für jedes y mit $y \leq x_i$ für alle i auch gilt $y \leq \inf x_i$. Beweis: $\prod_{i \in I} \operatorname{Hom}(y, x_i)$ ist genau dann nicht leer, wenn $y \leq x_i$ für alle i gilt. Analog ist das Koprodukt das Supremum. Diese Elemente müssen natürlich nicht existieren, so z.B. in der *diskreten* geordneten Menge, wo je zwei verschiedene Elemente nicht vergleichbar sind.

Übung 2 (Über- und Unter-Kategorien). Sei $c_0 \in \mathcal{C}$ ein Objekt in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Die *Kategorie $\mathcal{C} \downarrow c_0$ der Objekte über c_0* ist definiert als die Kategorie, deren Objekte Paare (x, f) sind mit $x \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ und $f \colon x \to c_0$, und deren Morphismen kommutative Diagramme $\begin{tikzcd}[column sep=small] x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c_0 & \end{tikzcd}$ sind. Analog ist die *Kategorie $c_0 \downarrow \mathcal{C}$ der Objekte unter c_0* definiert, deren Objekte Paare (x, f) sind mit $f \colon c_0 \to x$.

Betrachte die folgenden Kategorien:

1. Mod_R für einen Ring R;

2. Alg, die Kategorie der Ringe;

3. Grp, die Kategorie der Gruppen.

Bestimme in allen Fällen, für welche Objekte c_0 die Über-Kategorie Produkte hat (die dann *Pullbacks* oder *Faserprodukte* genannt werden) und die Unter-Kategorie Koprodukte hat (die dann *Pushouts* genannt werden), und wie sich diese explizit konstruieren lassen.

Der Einfachheit der Notation halber werde ich die Produkte und Koprodukte jeweils nur für zwei Objekte angeben; die Verallgemeinerung auf beliebig viele Objekte ist aber aus der Beschreibung offensichtlich.

1. Seien K, M_1, M_2 R-Moduln. Für Abbildungen $M_1 \xrightarrow{p} K$, $M_2 \xrightarrow{p} K$ definiere $M_1 \times_K M_2 = \{(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 \mid p(m) = p(n)$. Dann ist $M_1 \times_K M_2$ das Pullback:

freiwillige Abgabe bis zum 2. November

Ist $f\colon T \to K$ ein Objekt mit Abbildungen $T \xrightarrow{f_1} M_1$, $T \xrightarrow{f_2} M_2$, so gibt es eine eindeutige Fortsetzung $T \to M \times_T N$ durch $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$.

Sind umgekehrt $j_i\colon K \to M_i$ Abbildungen, so definiere $M_1 \oplus_K M_2 = (M_1 \oplus M_2)/(j_1(k), -j_2(k) \mid k \in K)$. Sind $M_1,\ M_2 \to T$ Abbildungen, die auf T übereinstimmen, so erhält man eine eindeutige Abbildung $M_1 \oplus_K M_2$.

2. Seien R, A_1, A_2 Ringe mit $A_i \to R$. Dann ist das der Pullback von abelschen Gruppen $A_1 \times_R A_2$ auch das Pullback in der Kategorie der Ringe: Die Multiplikation ist definiert durch
$$(a_1, a_2)(a_1', a_2') = (a_1 a_1', a_2 a_2').$$
Anders sieht es mit dem Pushout von $j_i\colon R \to A_i$ aus. (Übrigens ist in einer früheren Version des Skriptes zur Vorlesung ein Fehler. Das Tensorprodukt ist nicht, wie angegeben, das Koprodukt in der Kategorie der Ringe, sondern nur in der Kategorie der kommutativen Ringe. Was das Koprodukt in der Kategorie aller Ringe ist, folgt aus dieser Aufgabe, wenn man $R = \mathbf{Z}$ setzt.) Wir definieren den Ring $A_1 \coprod_R A_2$ als den freien R-Modul erzeugt von allen endlichen Wörtern
$$x_1 x_2 \cdots x_n; \quad n \geq 0, = \ x_i \in A_1 \cup A_2$$
modulo den Relationen
$$x_1 \cdots x_i x_{i+1} \cdots x_n = x_1 \cdots (x_i x_{i+1}) \cdots x_n,$$
wenn x_i und x_{i+1} beide in A_1 oder beide in A_2 sind;
$$x_1 \cdots x_i j_\alpha(r) j_\beta(r') x_{i+1} \cdots x_n = x_1 \cdots x_i j_\gamma(rr') x_{i+1} \cdots x_n$$
für alle $r,\ r' \in R$ und $\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2$, sowie
$$x_1 \cdots x_i 1 x_{i+1} \cdots x_n = x_1 \cdots x_n,$$
wenn 1 das Einselement in A_1 oder in A_2 ist. Außerdem gelten die Relationen
$$x_1 \cdots x_{i-1}(x_i + x_i') x_{i+1} \cdots x_n = x_1 \cdots x_n + x_1 \cdots x_i' \cdots x_n$$
Die Multiplikation auf $A_1 \coprod_R A_2$ ist durch Aneinanderhängen von Wörtern definiert.

Hat man nun zwei Morphismen $f_i\colon A_i \to T$, die auf R übereinstimmen, so erhälten man einen eindeutig definierten Morphismus $f_1 \sqcup_R f_2\colon A_1 \coprod_R A_2 \to T$ durch

$$(f_1 \sqcup_R f_2)(x_1 \cdots x_n) = (f_1 \cup f_2)(x_1) \cdots (f_1 \cup f_2)(x_n).$$

und die Standardinklusionen $A_i \to A_1 \coprod_R A_2$ als Wörter der Länge eins liefern die Vorschrift, wie man die Komponentenfunktionen daraus rekonstruieren kann.

3. Für Gruppen sind die Konstruktionen sehr ähnlich wie für Ringe; das Pullback ist wiederum das kartesische Produkt der Gruppen, das Pushout erzeugt von Wörtern $x_1 \cdots x_n$, wobei x_i in einer der Gruppen liegt, modulo den Relationen aus Punkt (2) außer der letzten, die bei Gruppen keinen Sinn macht. Das Pushout $G_1 \coprod_H G_2$ nennt man auch *amalgamiertes Produkt* und schreibt üblicherweise $G_1 *_H G_2$ dafür.

Übung 3 (Koalgebren und Komoduln). Eine Koalgebra C über einem kommutativen Ring k ist ein k-Modul mit einer *Komultiplikation* $\Delta\colon C \to C \otimes_k C$ und einer *Koeins* $\epsilon\colon C \to k$, so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes_k C \arrow[d, "\mathrm{id}_C \otimes_k \Delta"] \\ C \otimes_k C \arrow[r, "\Delta \otimes_k \mathrm{id}_C"] & C \otimes_k C \otimes_k C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \otimes_k C \arrow[dr, "\mathrm{id}_C \otimes_k \epsilon"'] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes_k C \arrow[dl, "\epsilon \otimes_k \mathrm{id}_C"] \\ & C, & \end{tikzcd}$$

und ein Komodul M ist ein k-Modul mit einer Komultiplikation $\Delta\colon M \to C \otimes_k M$, so dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes_k M \arrow[d, "\mathrm{id}_C \otimes_k \Delta"] \\ C \otimes_k M \arrow[r, "\Delta \otimes_k \mathrm{id}_M"] & C \otimes_k C \otimes_k M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes_k M \arrow[dl, "\epsilon \otimes_k \mathrm{id}_M"] \\ M. & \end{tikzcd}$$

Zeige, dass die Komoduln über einer Koalgebra eine Kategorie bilden, die genau dann abelsch ist, wenn C als k-Modul flach ist.

Die Kategorie Comod_C der Komoduln ist immer additiv, denn Linearkombinationen aus Morphismen sind wieder Morphismen. Außerdem gibt es endliche Produkte und Koprodukte, die übereinstimmen, nämlich die direkte Summe der zu Grunde liegenden abelschen Gruppen. Es bleibt also die Existenz von Kernen und Kokernen zu zeigen. Sei $M \xrightarrow{f} N$ ein Morphismus. Der Kokern ist gegeben durch N/M, den Quotienten der zu Grunde liegenden abelschen Gruppen, mit

$$N/M \xrightarrow{[n]\mapsto[\Delta(n)]} \frac{C \otimes_k N}{C \otimes_k M} \cong C \otimes_k N/M.$$

Ist $N \to T$ ein Morphismus, so dass $M \to N \to T$ trivial ist, so gibt es eine eindeutige Fortsetzung als Morphismus von abelschen Gruppen nach N/M, und diese Fortsetzung ist automatisch ein C-Komodulmorphismus.

Anders sieht es mit Kernen aus. Falls C flach ist über k und $\ker f$ den Kern als abelsche Gruppen bezeichnet, so haben wir eine Komodulstruktur auf $\ker f$ durch

$$\ker f \to \ker(C \otimes_k M \to C \otimes_k N) \cong C \otimes_k \ker f$$

und jeder Morphismus $T \to M$, so dass $T \to M \to N$ trivial ist, hat eine eindeutige Fortsetzung als Morphismus von abelschen Gruppen nach $\ker f$, die automatisch ein Komodulmorphismus ist. Nehmen wir nun an, dass Comod_C abelsch ist, so dass der Vergissfunktor $\mathrm{Comod}_C \to \mathrm{Mod}_k$ exakt ist; wir wollen zeigen, dass C flach ist. Sei $M' \to M$ ein Monomorphismus von k-Moduln, und betrachte den Komodulmorphismus

$$C \otimes_k M' \to C \otimes_k M$$

Dies ist ein Monomorphismus in Comod_C, denn

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Comod}_C}(M, C \otimes_k N) \cong \mathrm{Hom}_k(M, N) \quad \text{für } M \in \mathrm{Comod}_C,\ N \in \mathrm{Mod}_k.$$

Da der Vergissfunktor als exakt angenommen wurde, ist $C \otimes_k M' \to C \otimes_k M$ auch ein Monomorphismus in Mod_k, also injektiv; damit ist C flach.

Die Behauptung ist damit aber nicht gezeigt, denn wir haben die stärkere Annahme gemacht, dass der Vergissfunktor $\mathrm{Comod}_C \to \mathrm{Ab}$ exakt ist — aber diese Annahme sollte eigentlich hinzugefügt werden.

Übung 4 (Diagrammkategorien). Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie, $\mathcal{I}$ eine beliebige kleine Kategorie (d. h. die Objekte formen eine Menge) und $\mathcal{D} = \mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ die Kategorie der Funktoren und natürlichen Transformationen von $\mathcal{I}$ nach $\mathcal{C}$. Zeige, dass $\mathcal{D}$ wieder abelsch ist, und bestimme explizite Kriterien, wann ein Objekt $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ projektiv und wann es injektiv ist.

Die Kategorie $\mathcal{D}$ ist additiv, denn Produkte und Koprodukte werden objektweise gebildet und existieren daher, und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(F, G)$ trägt eine abelsche Gruppenstruktur durch $(F + G)(i) = F(i) + G(i)$ für $i \in \mathcal{I}$.

Sei $F \to G$ eine natürliche Transformation, also ein Morphismus in $\mathcal{D}$. Wir behaupten, dass $i \mapsto K(i) := \ker(F(i) \to G(i))$ einen Kern in $\mathcal{D}$ bildet, dass Kerne also objektweise definiert sind. Denn sei $T \to F$ ein Morphismus, so dass $T \to F \to G$ verschwindet. Das bedeutet, dass für alle $i \in \mathcal{I}$ die Komposition $T(i) \to F(i) \to G(i)$ verschwindet, also gibt es für jedes solche i eine eindeutige Fortsetzung nach $K(i)$. Da das entstehende Diagramm $T(i) \to K(i)$ kommutiert, erhalten wir einen eindeutig bestimmten Funktor $T \to K$, womit die Kerneigenschaft von K gezeigt ist. Das gleiche Argument funktioniert für Kokerne; diese sind ebenfalls objektweise definiert. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{D}$ eine abelsche Kategorie ist.

Zur Bestimmung der projektiven Objekte betrachten wir nur den Fall $\mathcal{I} = [1]$, d. h. die Kategorie mit zwei Objekten $\{0, 1\}$ und drei Morphismen: den beiden Identitätsmorphismen und einem Morphismus $0 \to 1$. Die $\mathcal{D}$-Diagramme sind einfach die Morphismen in $\mathcal{C}$, und die Morphismen in $\mathcal{D}$ sind kommutative Quadrate. Wir behaupten:

> Ein Objekt $A \to B$ in $\mathcal{D}$ ist genau dann projektiv, wenn die Abbildung ein Monomorphismus mit projektivem Kokern ist, wenn sie also von der Form $A \hookrightarrow A \oplus A'$ ist, mit A und A' projektiv.

Zunächst zeigen wir, dass die Abbildung ein Monomorphismus sein muss. Sei $a \in A$ ein Element im Kern von $A \to B$. Betrachte das Hochhebungsproblem

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[d] \arrow[ddl, "a"'] \\
 & & B \arrow[ddl] \\
A \arrow[r, "="] \arrow[d, "="] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
A \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Die Existenz einer Hochhebung impliziert, dass $a = 0$ gilt. Um zu zeigen, dass coker $A \to$

B projektiv sein muss, betrachten wir das Hochhebungsproblem

$$\begin{tikzcd}
& & A \arrow[d] \arrow[ddl] \\
& & B \arrow[ddl] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Die Existenz einer Hochhebung ist äquivalent dazu, dass es eine Hochhebung

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{coker}(A \to B) \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & \\
N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

gibt. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung gezeigt, und es bleibt zu zeigen, dass Abbildungen der Form $A \to A \oplus A'$ mit projektiven A, A' tatsächlich projektiv in $\mathcal{D}$ sind. Da aber gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A \to A \oplus A', M \to N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, M) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', N),$$

folgt dies aus der Projektivität von A und A' in $\mathcal{C}$.