ÜBUNGEN ZUR HOMOLOGISCHEN ALGEBRA UND GRUPPENKOHOMOLOGIE

— LÖSUNGEN ZU BLATT 1 —

Tilman Bauer 28. Oktober 2004

Übung 1 (*p*-lokale und *p*-adische Zahlen).

1. Sei p eine Primzahl und $\mathbf{Z}_{(p)} \subseteq \mathbf{Q}$ der Ring derjenigen Brüche $\frac{n}{q}$, für die $p \nmid q$. Definiere weiterhin $\mathbf{Z}/p^\infty = \bigcup_{i \geq 0} \mathbf{Z}/p^i$, wobei $\mathbf{Z}/p^i \hookrightarrow \mathbf{Z}/p^{i+1}$ eindeutig gegeben ist. Zeige, dass es eine kurze exakte Sequenz
$$0 \to \mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}/p^\infty \to 0$$
gibt, die nicht zerfällt.

2. Definiere den Ring $\mathbf{Z}_p = \operatorname{End}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^\infty) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^\infty, \mathbf{Z}/p^\infty)$. Zeige, dass es eine eindeutige injektive Ringabbildung $\mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{Z}_p$ gibt, und dass $\mathbf{Z}_p$ flach über $\mathbf{Z}_{(p)}$ ist.

Der Ring $\mathbf{Z}_{(p)}$ heißt Ring der *p-lokalen ganzen Zahlen*, der Ring $\mathbf{Z}_p$ der der *p-adischen Zahlen*.

1. Die Abbildung $i\colon \mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{Q}$ ist die Standardinklusion; die Abbildung $p\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}/p^\infty$ is gegeben durch $p(\frac{q}{p^n}) = \frac{q \mod p^n}{p^n} \in \mathbf{Z}/p^n \subset \mathbf{Z}/p^\infty$, wobei $p \nmid q$. Offensichtlich ist p surjektiv und i injektiv. Der Kern von p besteht aus denjenigen Brüchen, für die $n = 0$ gilt; also genau für die Elemente $q/1$ mit $q \in \mathbf{Z}_{(p)}$. Wenn die Sequenz zerfiele, so hätten wir eine Rektraktion $r\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}_{(p)}$. Es müsste gelten: $r(1) = 1$, also $pr(p^{-1}) = 1$. Aber $1 \in \mathbf{Z}_{(p)}$ ist nicht durch p teilbar.

2. Ein Endomorphismus f von $\mathbf{Z}/p^\infty$ ist eindeutig gegeben durch das Bild $f_n := f(1_{\mathbf{Z}/p^n}) \in \mathbf{Z}/p^n$ für alle n, wobei aber gelten muss, dass $f_{n+1} \equiv f_n \pmod{p^n}$ gilt; es gilt $(f_n)_{n\geq 0}(g_n)_{n \geq 0} = (f_n g_n)_{n \geq 0}$. Ist $s \in \mathbf{Z}_{(p)}$, so ist $s \mapsto (s \mod p^n)_{n \geq 0} \in \mathbf{Z}_p$ ein wohldefinierter Ringhomomorphismus $i\colon \mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{Z}_p$. Injektivität und Eindeutigkeit folgen daraus, dass $\mathbf{Z}_p$ nullteilerfrei ist, was wir jetzt zeigen. Definiere
$$\nu(f) = \min\{n \geq 0 \mid f_i = 0 \text{ für alle } i < n\}.$$
Dann gilt $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$, und $\nu(f) = -\infty \Leftrightarrow f = 0$. Also ist $\mathbf{Z}_p$ nullteilerfrei. Daraus folgt auch, dass $\mathbf{Z}_p$ flach über $\mathbf{Z}_{(p)}$ ist: Sei $0 \to M \to N$ ein Monomorphismus von $\mathbf{Z}_{(p)}$-Moduln. Notfalls per Auswahlaxiom können wir Zwischenmoduln $M = M_0 < M_1 < \cdots < M_\sigma = N$ für eine Kardinalzahl σ finden, so dass M_{i+1} von dem Bild von M_i und einem weiteren Element erzeugt ist. Also ist $M_{i+1}/M_i \cong \mathbf{Z}_{(p)}/I$ für ein (Haupt-)Ideal I. Es genügt zu zeigen, dass

$\mathbf{Z}_p \otimes_{\mathbf{Z}_{(p)}} I \to \mathbf{Z}_p$ injektiv ist; dies ist aber äquivalent zu der Aussage, dass kein Element von I ein Nullteiler in $\mathbf{Z}_p$ ist.

Übung 2 (Produkte von freien Moduln)*. Sei $M = \prod_{i \geq 0} \mathbf{Z}$. Zeige, dass M keine freie abelsche Gruppe ist. *Tipp:* Zeige zunächst, dass die Abbildung $\bigoplus_{i\geq 0} \mathbf{Z} \to \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z})$, die $(a_0, a_1, \dots)$ abbildet auf $x \mapsto a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots$ (die Summe ist endlich), ein Isomorphismus ist. Falls nun $M \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbf{Z}$ ein Isomorphismus wäre, so müsste J überabzählbar sein, und $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{j\in J} \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \prod_{j \in J} \mathbf{Z}$ wäre wiederum überabzählbar.

Beweis (nach Specker [Spe50]): Bezeichne e^n die Folge $(\delta_{in})_{i\geq 1} \in \prod \mathbf{Z}$. Zu jeder Folge (a_i) bezeichnen wir mit $(a_i)[n]$ die Folge a'_i mit $a'_i = 0$ für $i < n$ und $a'_i = a_i$ für $i \geq n$.

Zunächst zeigen wir, dass jeder Homomorphismus $f\colon \prod \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, der auf allen e^n verschwindet, schon null sein muss. Betrachte eine beliebige Folge $(a_i) \in \prod \mathbf{Z}$. Wir können per euklidischem Algorithmus Folgen (c_i) und (d_i) finden, so dass gilt: $a_i = 2^i c_i + 3^i d_i$. Da f auf allen e^n verschwindet, gilt für jedes $k \geq 1$:

$$f((2^i c_i)) = f((2^i c_i)[k]) = 2^k f((2^{i-k} c_i)[k]),$$

also $f((2^i c_i)) = 0$ und ebenso $f((3^i d_i)) = 0$, also $f((a_i)) = 0$.

Als zweiten Schritt zeigen wir, dass $f(e^n) = 0$ für fast alle $n \geq 1$ gilt. Nehmen wir das Gegenteil an; o.B.d.A. können wir (durch Übergang zu einer Unterfolge) annehmen, dass $f(e^n) \neq 0$ für alle n gilt. Wähle eine monoton steigende Indexfolge $(i_k)_{k\geq 1}$, so dass

$$2^{i_{k+1}} > i_k + \sum_{j=1}^{i_k} 2^j |f(e^k)|.$$

Definiere die Folge (ϵ_i) so, dass $\epsilon_i = 1$, falls $i = i_k$ für ein k ist, ansonsten $\epsilon_i = 0$. Dann gibt es eine Folge (c_i), so dass

$$(2^i \epsilon_i) = \sum_{j=1}^{k} 2^{i_j} e^{i_j} + 2^{i_{k+1}} (c_i).$$

Wähle nun k_0 so, dass $i_{k_0} \geq f((2^i \epsilon_i))$. Dann gilt für alle $k \geq k_0$:

$$2^{i_{k+1}} |f((c_i))| = \left| f((2^i \epsilon_i)) - \sum_{j=1}^{k} 2^{i_j} f(e^{i_j}) \right| \leq i_k + \sum_{j=1}^{i_k} \left| 2^j f(e^j) \right| < 2^{i_{k+1}},$$

also

$$f((2^i\epsilon_i)) = \sum_{j=1}^{k} 2^{i_j} f(e^{i_j}).$$

Somit ist für $j > i_k$ $f(e^j) = 0$, q.e.d.

Übung 3 (Endlich präsentierte Moduln). Sei R ein Ring und M ein R-Modul. M heißt *endlich erzeugt*, falls es einen freien R-Modul F von endlichem Rang mit einer surjektiven Abbildung $F \xrightarrow{p} M$ gibt. Wenn F und p so gewählt werden können, dass $\ker p$ ebenfalls endlich erzeugt ist, so heißt M *endlich präsentiert*. Bezeichne mit M^* den R^{op}-Modul $\mathrm{Hom}_R(M, R)$, wobei die Modulstruktur gegeben ist durch $(f.r)(m) = f(m)r$.

1. Für alle R-Moduln $M,\ N$ gibt es eine natürliche Abbildung

$$\begin{aligned} a\colon M^* \otimes_R N &\to \mathrm{Hom}_R(M, N) \\ f \otimes n &\mapsto (m \mapsto f(m)n) \end{aligned}$$

   Zeige, dass a ein Isomorphismus für endlich präsentierte, projektive R-Moduln M ist (N beliebig). (Ein Modul M, für den a ein Isomorphismus für alle N ist, heißt *dualisierbar*.)

2. Zeige, dass jeder endlich präsentierte, flache R-Modul projektiv ist.

1. Ist M endlich erzeugt und frei, so auch M^* frei, und a ein Isomorphismus, denn beide Seiten sind isomorph zu einer direkten Summe von Ns.

   Sei $F_1 \xrightarrow{p_0} F_0 \xrightarrow{p} M$ exakt mit endlich erzeugten, freien R-Moduln F_0 und F_1. Betrachte die Leiter

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M^* \otimes_R N \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "a"] & F_0^* \otimes_R N \arrow[r, "p_0^*"] \arrow[d, "a", "\cong"'] & F_1^* \otimes_R N \arrow[d, "a", "\cong"'] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M, N) \arrow[r, "p^*"] & \mathrm{Hom}_R(F_0, N) \arrow[r, "p_0^*"] & \mathrm{Hom}_R(F_1, N). \end{tikzcd}$$

   Da $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ linksexakt ist, ist die untere Zeile ist exakt. Da M projektiv ist, hat $M^* \to F_0^*$ einen Schnitt, also bleibt die Exaktheit der oberen Zeile auch nach Tensorieren mit N erhalten. Wir zeigen die Injektivität von a: sei $a(x) = 0$ für ein $x \in M^* \otimes_R N$. Dann ist $p_0^*(a(x)) = 0$ und also auch $p_0^*(x) = 0$. Wegen der Injektivität von p_0^* ist $x = 0$. Zur Surjektivität: sei $y \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, und sei $y_0 = a^{-1}(p^*(y))$. Wegen der Kommutativität des Diagramms gilt $p_0^*(y_0) = a^{-1}(p^* p_0^*)(y) = 0$, denn $p_0 \circ p = 0$. Wegen der Exaktheit in der oberen Zeile gibt es also ein Urbild $\tilde{y} \in M^* \otimes_R N$ von y_0 bzw. von y.

2. Für diesen Teil verwenden wir eine andere, aber verwandte Art von Dualität, nämlich den exakten Funktor $I = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})\colon \mathrm{Mod}_R^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}_{R^{\mathrm{op}}}$. Sind $M,\ N \in \mathrm{Mod}_R$, so gibt es einen Morphismus

$$a\colon I(N) \otimes_R M \to I(\mathrm{Hom}_R(M, N)), \quad f \otimes n \mapsto (g \mapsto f(g(n)).$$

Dieser ist offensichtlich ein Isomorphismus, wenn $M = R$ gilt; also auch, wenn M endlich erzeugt und frei ist, denn $\mathrm{Hom}(-, T)$ bildet direkte Summen auf direkte Produkte ab, die im endlich erzeugten Fall isomorph zu direkten Summen sind. Da I exakt ist, folgt, dass a ein Isomorphismus für alle endlich präsentierten (nicht notwendig projektiven!) Moduln ist: Ist $F_1 \to F_0 \to M$ eine Präsentation mit endlich erzeugten, freien F_i, so haben wir ein Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
I(N) \otimes F_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & I(N) \otimes F_0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & I(N) \otimes M \arrow[r] \arrow[d, "a"] & 0 \\
I(\mathrm{Hom}_R(F_1, N)) \arrow[r] & I(\mathrm{Hom}_R(F_0, N)) \arrow[r] & I(\mathrm{Hom}_R(M, N)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Also ist auch a ein Isomorphismus.

Um nun zu zeigen, dass M projektiv ist, wenn es flach ist, müssen wir zeigen, dass für jeden Epimorphismus $N_1 \xrightarrow{f} N_2 \to 0$ auch

$$\mathrm{Hom}_R(M, N_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M, N_2)$$

ein Epimorphismus ist. Es genügt zu zeigen, dass

$$I(\mathrm{Hom}_R(M, N_2)) \xrightarrow{I(f_*)} I(\mathrm{Hom}_R(M, N_1))$$

ein Monomorphismus ist, denn daraus folgt, dass $I(\operatorname{coker} f_*) = 0$ wegen der Exaktheit, und daraus folgt, wie in der Vorlesung gezeigt, dass $\operatorname{coker} f_* = 0$. Aber $I(\mathrm{Hom}_R(M, N_i)) \cong I(N_i) \otimes_R M$, und $I(N_2) \otimes_R M \to I(N_1) \otimes_R M$ ist ein Monomorphismus, weil I exakt und M flach ist.

Übung 4 (Satz von Baer). Ein R-Modul M ist genau dann injektiv, wenn er für jedes Ideal $\mathfrak{p} \lhd R$ die Hochhebungseigenschaft hat:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[dl, dotted] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist eine abelsche Gruppe genau dann injektiv, wenn sie teilbar ist, d. h. Multiplikation mit $n \in \mathbf{Z} - 0$ surjektiv ist.

Für nicht endlich erzeugte M ist dies eine Anwendung des Zornschen Lemmas. Sei $0 \to N' \to N$ ein Monomorphismus von R-Moduln, $f\colon N' \to M$ und $X = \{(K, g) \mid N' \leq K \leq N,\ g\colon K \to M$ ist Fortsetzung von $f\}$ partiell geordnet durch

$$(K, g) \leq (K', g') \Leftrightarrow K \leq K' \text{ und } g'|_K = g.$$

Dann hat X ein maximales Element $g\colon K \to M$ und wir müssen zeigen, dass $K = N$. Andernfalls sei $m \in M - K$ und $\mathfrak{p} = \{r \in R \mid r.m \in K$. Nach Voraussetzung gibt es eine Fortsetzung $\tilde{g}\colon R \to M$ von $\mathfrak{p} \xrightarrow{g \circ m} M$. Sei nun

$$K' = K + mR < N; \quad g'(k + mr) = g(k) + \tilde{g}(r).$$

Dann ist $(K', g') > (K, g)$, ein Widerspruch.

Literatur

[Spe50] Ernst Specker, *Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen*, Portugaliae Math. **9** (1950), 131–140. MR MR0039719 (12,587b)