Übungen zur homologischen Algebra und Gruppenkohomologie

— Blatt 5 —

Tilman Bauer 16. November 2004

Übung 1. Sei n eine natürliche Zahl.

1. Berechne die Homologie und Kohomologie der Gruppe $G = C_n \times C_n$ mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}$.

2. Bestimme die Abbildungen $H_*(G;\mathbf{Z}) \to H_*(C_n;\mathbf{Z})$ und $H^*(C_n;\mathbf{Z}) \to H^*(G;\mathbf{Z})$, die durch die Projektion $G \to C_n$ auf den ersten Faktor induziert werden.

Übung 2 (p-Gruppen). Gib eine Beschreibung (mit kohomologischen Methoden) von allen Gruppen der Ordnung p^2 und p^3 für eine Primzahl p. Tipp: Jede p-Gruppe G hat ein nichttriviales Zentrum Z (warum?), kann also als Erweiterung $1 \to Z \to G \to H \to 1$ für ein H geschrieben werden. Klassifiziere diese Erweiterungen.

Übung 3*. Sei G eine torsionsfreie Gruppe, die $\mathbf{Z}$ als Normalteiler von endlichem Index enthält. Dann muss schon $G \cong \mathbf{Z}$ gelten. Tipp: Betrachte zunächst den Fall, wo $\mathbf{Z}$ zentral ist.

Übung 4 (adjungierte Funktoren). Bestimme links- und rechtsadjungierte Funktoren zu folgenden Funktoren, falls sie existieren:

1. der Funktor $\epsilon_n \colon \mathrm{Ch}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$, die einem Kettenkomplex $C_\bullet$ in einer abelschen Kategorie den Eintrag C_n zuordnet;

2. der Funktor $H_n \colon \mathrm{Ch}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$;

3. der Funktor $\Delta \colon \mathcal{C} \to \{\mathbf{Z}\text{-graduierte Sequenzen in } \mathcal{C}\}$, der einem Objekt $c \in \mathcal{C}$ die Sequenz $\cdots \to c \xrightarrow{\mathrm{id}} c \to \cdots$ zuordnet. (Nimm vereinfachend an, dass $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit abzählbaren Produkten und Koprodukten ist.)

Übung 5 (Komonaden). Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine *Komonade* (auch *Kotripel* genannt) ist ein Endofunktor $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ zusammen mit natürlichen Transformationen $\epsilon \colon F \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $\Delta \colon F \to F \circ F$, so dass die folgenden Diagramm kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & F(F(X)) \arrow[d, "F\circ\Delta"] \\
F(F(X)) \arrow[r, "\Delta\circ F"] & F(F(F(X)))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & F(X) \arrow[dl, equal] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, equal] & \\
F(X) & F(F(X)) \arrow[l, "F\circ\epsilon"'] \arrow[r, "F\circ\epsilon"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

(Es ist also ein *Ringobjekt in der Kategorie der Endofunktoren*.)

---

freiwillige Abgabe bis zum 23. November

Sind $f\colon \mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{C} :g$ adjungierte Funktoren (f ist linksadjungiert), dann zeige, dass $F = f \circ g$ eine Komonade ist.

Betrachten wir das Objekt $F^n(X) = F(\cdots F(X) \cdots)$. Dann gibt es $n+1$ natürliche Transformationen $d_i\colon F^{n+1}(X) \to F^n(X)$, nämlich $d_i = \mathrm{id}^i \circ \epsilon \circ \mathrm{id}^{n-i}$.

Nun sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie, und $C_n(X) = F^{n+1}(X)$. Definiere $d\colon C_n \to C_{n-1}$ durch $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$. Zeige (analog zur Bar-Konstruktion), dass $C_\bullet(X) \to X$ ein Kettenkomplex ist, der exakt ist, wenn $\epsilon\colon FX \to X$ einen Schnitt hat.