Übungen zur homologischen Algebra und Gruppenkohomologie

— Blatt 4 —

Tilman Bauer 9. November 2004

Übung 1 (Yoneda Ext, Teil 1). Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie und M, N zwei Objekte. Betrachte für $n \geq 1$ die Mengen von exakten Sequenzen

$$\mathrm{Ex}^n(M,N) = \{0 \to N \to X_{n-1} \to X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0\}/\sim,$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die erzeugt wird von $E \sim E'$, wenn es eine (Leiter-) Abbildung $E \to E'$ gibt, die auf den M- und N-Einträgen die Identität ist. Zeige, dass Ex^n ein Funktor $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ ist. Tipp: Ist $E = (0 \to N \to X_\bullet \to M \to 0) \in \mathrm{Ext}^*(M,N)$, $f\colon M' \to M$, und $g\colon N \to N'$ so definiere

$$f^*E\colon 0 \to N \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \times_M M' \to M' \to 0$$

und

$$g_*E\colon 0 \to N' \to X_{n-1} \sqcup_N N' \to X_{n-2} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0.$$

Hierbei bezeichnet $\times_M$ das Pullback über M und $\sqcup_N$ das Pushout unter N. Was geschieht für $n = 1$?

Übung 2 (Yoneda Ext, Teil 2). Zeige, dass $\mathrm{Ex}^n(M,N)$ eine abelsche Gruppe bezüglich der folgenden Operation ist: Seien $E, E' \in \mathrm{Ex}^n(M,N)$. Dann definiere

$$E + E'\colon 0 \to N \to X_{n-1} \sqcup_N X'_{n-1} \to X_{n-2} \oplus X'_{n-2} \to \cdots \to X_1 \oplus X'_1 \to X_0 \times_M X'_0 \to M \to 0.$$

Zeige, dass $E + E' \in \mathrm{Ex}^n(M,N)$, und dass dies eine abelsche Gruppenstruktur auf $\mathrm{Ex}^n(M,N)$ definiert. Gib einen expliziten Repräsentanten für das Nullelement an. Achte wiederum auf den Spezialfall $n = 1$.

Übung 3 (Yoneda Ext, Teil 3). Habe $\mathcal{C}$ genug Projektive und sei $P_\bullet \to M$ eine projektive Auflösung von M. Sei $E \in \mathrm{Ex}^n(M,N)$. Dann hat das Hochhebungsproblem

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
E\colon & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

eine Lösung, und wir erhalten ein Element

$$\phi(E) \in \ker(\mathrm{Hom}(P_n,N) \to \mathrm{Hom}(P_{n+1},N)) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^n(M,N).$$

Zeige, dass $\phi(E) \in \mathrm{Ext}^n(M,N)$ wohldefiniert ist, und dass $\phi\colon \mathrm{Ex}^n(M,N) \to \mathrm{Ext}^n(M,N)$ ein Isomorphismus von abelschen Gruppen ist.

Übung 4 (Yoneda-Produkt). Ist $E \in \mathrm{Ex}^n(M, N)$, $E' \in \mathrm{Ex}^m(Q, M)$, so definiere $EE' \in \mathrm{Ex}^n(Q, N)$ durch die Erweiterung

$$0 \to N \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to X'_{m-1} \to \cdots \to X'_0 \to Q,$$

wobei die mittlere Abbildung die Komposition $X_0 \to M \to X'_{m-1}$ ist. Zeige, dass dies eine wohldefinierte bilineare assoziative Multiplikation ist. Achte besonders auf den Fall, wo $m = 0$ oder $n = 0$ ist, wobei wir $\mathrm{Ex}^0(M, N) = \mathrm{Hom}(M, N)$ setzen.