Übungen zur homologischen Algebra und Gruppenkohomologie

— Blatt 3 —

Tilman Bauer 2. November 2004

Übung 1 (Fünferlemma). In einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$ sei folgendes kommutatives Diagramm gegeben:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & M_5 \arrow[d, "\cong"] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5. \end{tikzcd}$$

Zeige, dass dann auch der mittlere Morphismus ein Isomorphismus ist. Welche Bedingungen braucht man genau an die anderen senkrechten Pfeile, um zu schließen, dass der mittlere Morphismus ein Monomorphismus (Epimorphismus) ist?

Übung 2 (Der Bockstein). Sei R ein Ring und $r \in R$. Ist M ein R-Modul, so gibt es eine kurze exakte Sequenz $0 \to M \xrightarrow{r} M \xrightarrow{p} M/r \to 0$. Ist N ein R^{op}-Modul, so erhalten wir also eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_n^R(N,M) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Tor}_n^R(N,M/r) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N,M) \xrightarrow{r_*} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N,M) \to \cdots .$$

Der *Bockstein-Homomorphismus* ist definiert als

$$\beta\colon \mathrm{Tor}_n^R(N,M/r) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N,M/r); \quad \beta = p_* \circ \partial$$

und ist eine natürliche Transformation von $\mathrm{Tor}_n^R(-,M/r)$ nach $\mathrm{Tor}_{n-1}^R(-,M/r)$. Sei p eine Primzahl und $R = \mathbf{Z}[t]/(t^p-1)$ Bestimme die Torsionsgruppen $\mathrm{Tor}_R(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/p)$ sowie den Bockstein für $r = p \in R$.

Übung 3 (Dimensionsverschiebung). Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein rechtsexakter Funktor von abelschen Kategorien. Gegeben sei eine exakte Sequenz

$$0 \to K \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

in $\mathcal{C}$, wobei alle P_i projektiv sind. Zeige, dass dann gilt:

$$L_iF(M) \cong L_{i-n}F(K) \quad \text{für alle } i > n.$$

Insbesondere gilt $L_iF = 0$ für alle i, falls $L_1F = 0$.

Übung 4 (Selbstinjektive Ringe). Sei k ein Körper und G eine Gruppe. Zeige, dass die Klasse der injektiven und die Klasse der projektiven $k[G]$-Moduln übereinstimmen (ein solcher Ring heißt selbstinjektiv). Gib ein Beispiel, wo das nicht der Fall ist, wenn k kein Körper ist, sondern nur ein Ring, und eines, wo G keine Gruppe, sondern nur ein Monoid ist.

---

freiwillige Abgabe bis zum 9. November