Übungen zur homologischen Algebra und Gruppenkohomologie

— Blatt 2 —

Tilman Bauer 26. Oktober 2004

Übung 1 (Partiell geordnete Mengen). Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, aufgefasst als Kategorie. Wann sind in X Produkte und Koprodukte definiert, und wie lassen sie sich explizit beschreiben?

Übung 2 (Über- und Unter-Kategorien). Sei $c_0 \in \mathcal{C}$ ein Objekt in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Die *Kategorie $\mathcal{C} \downarrow c_0$ der Objekte über c_0* ist definiert als die Kategorie, deren Objekte Paare (x, f) sind mit $x \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ und $f\colon x \to c_0$, und deren Morphismen kommutative Diagramme $\begin{tikzcd}[sep=small] x \arrow[rr] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & c_0 & \end{tikzcd}$ sind. Analog ist die *Kategorie $c_0 \downarrow \mathcal{C}$ der Objekte unter c_0* definiert, deren Objekte Paare (x, f) sind mit $f\colon c_0 \to x$.

Betrachte die folgenden Kategorien:

1. Mod_R für einen Ring R;

2. Alg, die Kategorie der Ringe;

3. Grp, die Kategorie der Gruppen.

Bestimme in allen Fällen, für welche Objekte c_0 die Über-Kategorie Produkte hat (die dann *Pullbacks* oder *Faserprodukte* genannt werden) und die Unter-Kategorie Koprodukte hat (die dann *Pushouts* genannt werden), und wie sich diese explizit konstruieren lassen.

Übung 3 (Koalgebren und Komoduln). Eine Koalgebra C über einem kommutativen Ring k ist ein k-Modul mit einer *Komultiplikation* $\Delta\colon C \to C \otimes_k C$ und einer *Koeins* $\epsilon\colon C \to k$, so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes_k C \arrow[d, "\mathrm{id}_C \otimes_k \Delta"] \\ C \otimes_k C \arrow[r, "\Delta \otimes_k \mathrm{id}_C"] & C \otimes_k C \otimes_k C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \otimes_k C \arrow[dr, "\mathrm{id}_C \otimes_k \epsilon"'] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes_k C \arrow[dl, "\epsilon \otimes_k \mathrm{id}_C"] \\ & C, & \end{tikzcd}$$

und ein Komodul M ist ein k-Modul mit einer Komultiplikation $\Delta\colon M \to C \otimes_k M$, so dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes_k M \arrow[d, "\mathrm{id}_C \otimes_k \Delta"] \\ C \otimes_k M \arrow[r, "\Delta \otimes_k \mathrm{id}_M"] & C \otimes_k C \otimes_k M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes_k M \arrow[dl, "\epsilon \otimes_k \mathrm{id}_M"] \\ M. & \end{tikzcd}$$

freiwillige Abgabe bis zum 2. November

Zeige, dass die Komoduln über einer Koalgebra eine Kategorie bilden, die genau dann abelsch ist, wenn C als k-Modul flach ist.

Übung 4 (Diagrammkategorien). Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie, $\mathcal{I}$ eine beliebige kleine Kategorie (d. h. die Objekte formen eine Menge) und $\mathcal{D} = \mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ die Kategorie der Funktoren und natürlichen Transformationen von $\mathcal{I}$ nach $\mathcal{C}$. Zeige, dass $\mathcal{D}$ wieder abelsch ist, und bestimme explizite Kriterien, wann ein Objekt $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ projektiv und wann es injektiv ist.