Übungen zur homologischen Algebra und Gruppenkohomologie

— Blatt 1 —

Tilman Bauer 19. Oktober 2004

Übung 1 (p-lokale und p-adische Zahlen).

1. Sei p eine Primzahl und $\mathbf{Z}_{(p)} \subseteq \mathbf{Q}$ der Ring derjenigen Brüche $\frac{n}{q}$, für die $p \nmid q$. Definiere weiterhin $\mathbf{Z}/p^\infty = \bigcup_{i \geq 0} \mathbf{Z}/p^i$, wobei $\mathbf{Z}/p^i \hookrightarrow \mathbf{Z}/p^{i+1}$ eindeutig gegeben ist. Zeige, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}/p^\infty \to 0$$

   gibt, die nicht zerfällt.

2. Definiere den Ring $\mathbf{Z}_p = \mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^\infty) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^\infty, \mathbf{Z}/p^\infty)$. Zeige, dass es eine eindeutige injektive Ringabbildung $\mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{Z}_p$ gibt, und dass $\mathbf{Z}_p$ flach über $\mathbf{Z}_{(p)}$ ist.

Der Ring $\mathbf{Z}_{(p)}$ heißt Ring der *p-lokalen ganzen Zahlen*, der Ring $\mathbf{Z}_p$ der der *p-adischen Zahlen*.

Übung 2 (Produkte von freien Moduln)*. Sei $M = \prod_{i \geq 0} \mathbf{Z}$. Zeige, dass M keine freie abelsche Gruppe ist. *Tipp:* Zeige zunächst, dass die Abbildung $\bigoplus_{i \geq 0} \mathbf{Z} \to \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Z})$, die $(a_0, a_1, \dots)$ abbildet auf $x \mapsto a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots$ (die Summe ist endlich), ein Isomorphismus ist. Falls nun $M \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbf{Z}$ ein Isomorphismus wäre, so müsste J überabzählbar sein, und $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{j \in J} \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \prod_{j \in J} \mathbf{Z}$ wäre wiederum überabzählbar.

Übung 3 (Endlich präsentierte Moduln). Sei R ein Ring und M ein R-Modul. M heißt *endlich erzeugt*, falls es einen freien R-Modul F von endlichem Rang mit einer surjektiven Abbildung $F \xrightarrow{p} M$ gibt. Wenn F und p so gewählt werden können, dass $\ker p$ ebenfalls endlich erzeugt ist, so heißt M *endlich präsentiert*. Bezeichne mit M^* den R^{op}-Modul $\mathrm{Hom}_R(M, R)$, wobei die Modulstruktur gegeben ist durch $(f.r)(m) = f(m)r$.

1. Für alle R-Moduln M, N gibt es eine natürliche Abbildung

$$\begin{aligned} a\colon M^* \otimes_R N &\to \mathrm{Hom}_R(M, N) \\ f \otimes n &\mapsto (m \mapsto f(m)n) \end{aligned}$$

   Zeige, dass a ein Isomorphismus für endlich präsentierte, projektive R-Moduln M ist (N beliebig). (Ein Modul M, für den a ein Isomorphismus für alle N ist, heißt *dualisierbar*.)

2. Zeige, dass jeder endlich präsentierte, flache R-Modul projektiv ist.

freiwillige Abgabe bis zum 26. Oktober

Übung 4 (Satz von Baer). Ein R-Modul M ist genau dann injektiv, wenn er für jedes Ideal $\mathfrak{p} \lhd R$ die Hochhebungseigenschaft hat:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[dl, dotted] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist eine abelsche Gruppe genau dann injektiv, wenn sie teilbar ist, d. h. Multiplikation mit $n \in \mathbf{Z} - 0$ surjektiv ist.