

SKRIPT ZUR VORLESUNG IM WINTERSEMESTER 2004/2005

# Homologische Algebra und Gruppenkohomologie

Tilman Bauer

11. März 2013 – Überarbeitung

Westfälische Wilhelms-Universität Münster



# Einleitung

Dies ist eine vorläufige Version des Skripts zu der Vorlesung „Homologische Algebra und Gruppenkohomologie“ im Wintersemester 2004/2005.

Die Vorläufigkeit spiegelt sich auch darin wieder, dass es noch keine wirkliche Einleitung gibt. Für einen sehr guten Abriss über die Geschichte der homologischen Algebra verweise ich auf [Wei99].

Das klassische und auch heute noch lesenswerte Buch von Cartan und Eilenberg über homologische Algebra [CE99] markierte zu der Zeit seiner Erscheinung den Beginn der homologischen Algebra; viele Dinge werden noch heute genauso gemacht wie in diesem Buch. Unter den neueren Büchern ist [Wei94] besonders empfehlenswert; es ist stückweise zwar recht knapp gehalten, hat aber insgesamt ein gutes Tempo, bei dem keine Langeweile aufkommt. Weitere einführende Textbücher sind [ML95, HS97]. An den Leser mit Vorkenntnissen in homologischer Algebra, der mehr über abgeleitete Kategorien lernen möchte, wendet sich das Buch von Gel'fand und Manin [GM03].

Das Standardwerk zur Gruppenkohomologie ist das Buch [Bro94] von Ken Brown; weiterführend, aber vor allem auf endliche Gruppen spezialisiert ist Adem-Milgram [AM04]. Besonders wegen des Kapitels über den multiplikativen Transfer, der in diesem Skript und auch in [Bro94] nicht behandelt wird, bietet sich auch [Eve91] an.

Der Index zu diesem Skript wurde von Clara Strohm erstellt, die auch Korrektur gelesen hat und der ich dafür sehr dankbar bin.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>iii</b>
<b>1 Ringe und Moduln</b>	<b>1</b>
1.1 Definition von Ring und Modul . . . . .	1
1.2 Operationen auf Moduln und Ringen . . . . .	2
1.2.1 Operationen auf Moduln; das Tensorprodukt . . . . .	3
1.2.2 Operationen auf Ringen . . . . .	6
1.3 Frei, projektiv, flach, teilbar, injektiv . . . . .	6
<b>2 Kategorien und Funktoren</b>	<b>13</b>
2.1 Kategorien . . . . .	13
2.2 Abelsche Kategorien . . . . .	17
<b>3 Auflösungen und abgeleitete Funktoren</b>	<b>20</b>
3.1 Projektive und injektive Auflösungen . . . . .	20
3.2 Homologie und Homotopie . . . . .	22
3.3 Das Fundamentallemma der homologischen Algebra . . . . .	23
3.4 Die lange exakte Sequenz . . . . .	25
3.5 Tor und Ext . . . . .	29
3.5.1 Symmetrie von Tor und das Analogon für Ext . . . . .	31
3.5.2 Yoneda-Ext . . . . .	33
<b>4 Gruppenhomologie und -kohomologie</b>	<b>37</b>
4.1 Definition und Beispiele . . . . .	37
4.1.1 Funktorialität . . . . .	39
4.1.2 Die Bar-Auflösung . . . . .	40
4.2 Gruppenkohomologie und Gruppenerweiterungen . . . . .	42
4.3 Exkurs: Adjungierte Funktoren . . . . .	44
4.4 Induktion und Transfer . . . . .	47
<b>5 Multiplikative Strukturen</b>	<b>53</b>
5.1 Kettenalgebren und -koalgebren . . . . .	53
5.1.1 Multiplikative und komultiplikative Auflösungen . . . . .	56
5.1.2 Das Produkt auf Ext und das Koproduct auf Tor . . . . .	59
5.1.3 Eigenschaften des Produkts . . . . .	61
5.2 Äquivalente Produkte . . . . .	62
5.3 Höhere Produkte . . . . .	63

<b>6</b>	<b>Spektralsequenzen</b>	<b>65</b>
6.1	Exkurs: Limes und Kolimes	65
6.1.1	Exaktheit von Limes und Kolimes	67
6.2	Filtrierte Kettenkomplexe	71
6.2.1	Filtrierungen und Metriken	73
6.3	Spektralsequenzen und exakte Tripel	74
6.4	Der zentrale Konvergenzsatz	77
6.4.1	Absteigende Filtrierungen	81
6.5	Die Spektralsequenz eines Doppelkomplexes	82
6.6	Anwendungen und Beispiele	84
6.6.1	Universelle Koeffizienten	84
6.6.2	Künneth-Spektralsequenzen	85
<b>7</b>	<b>Die Hochschild-Lyndon-Serre-Spektralsequenz</b>	<b>88</b>
7.1	Konstruktion und Beispiele	88
7.2	Multiplikativität	90
7.3	Weitere Beispiele	93
<b>8</b>	<b>Triangulierte Kategorien und abgeleitete Kategorien</b>	<b>97</b>
8.1	Prätriangulierte Kategorien	97
8.2	Exkurs: Quotientenkategorien und Lokalisierung von Kategorien	99
8.3	Die Homotopiekategorie der Kategorie der Kettenkomplexe	100
8.3.1	Das Oktaeder-Axiom	103
8.4	Abgeleitete Kategorien und abgeleitete Funktoren	104



# 1 Ringe und Moduln

## 1.1 Definition von Ring und Modul

Unter einem Ring verstehen wir in diesem Buch grundsätzlich einen assoziativen, nicht unbedingt kommutativen, Ring mit Eins:

**Definition.** Ein Ring  $R$  ist eine abelsche Gruppe  $R$  zusammen mit einem Einselement  $1 \in R$  und einer assoziativen bilinearen Abbildung  $R \times R \rightarrow R$ ,  $(x, y) \mapsto xy$ , so dass  $1x = x1 = x$  für alle  $x \in R$ .

Sind  $R, S$  Ringe, so ist ein Ring(homo)morphismus  $R \rightarrow S$  eine lineare Abbildung  $f: R \rightarrow S$  mit den Eigenschaften

$$f(1_R) = 1_S \quad \text{und} \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{für alle } x, y \in R.$$

Wir bezeichnen mit  $\text{Alg}(R, S)$  die Menge aller Ringmorphisimen von  $R$  nach  $S$ . Ist  $R$  ein kommutativer Ring und  $\phi: R \rightarrow S$  ein Ringmorphismus mit der Eigenschaft, dass  $\phi(r)s = s\phi(r)$  für alle  $r \in R, s \in S$  gilt, so nennen wir  $S$  eine  $R$ -Algebra.

Moduln sind per Definition immer Linksmoduln:

**Definition.** Ein Modul  $M$  über einem Ring  $R$  ist eine abelsche Gruppe  $M$  zusammen mit einer bilinearen Multiplikation  $\mu: R \times M \rightarrow M$ , so dass

$$\mu(1, m) = m \quad \text{und} \quad \mu(x, \mu(y, m)) = \mu(xy, m) \quad \text{für alle } x, y \in R \text{ und } m \in M.$$

Sind  $M, N$  Moduln über demselben Ring  $R$ , so nennt man eine  $R$ -lineare Abbildung  $M \rightarrow N$  einen Modul(homo)morphismus. Wir bezeichnen mit  $\text{Hom}_R(M, N)$  die abelsche Gruppe aller solcher Morphismen.

Oft schreiben wir statt  $\mu(x, m)$  einfacher  $x.m$  oder sogar  $xm$ , was nicht zu Mehrdeutigkeiten führen kann.

Die Ringmultiplikation gibt jedem Ring  $R$  eine kanonische Modulstruktur über sich selbst; ein Ideal  $I \triangleleft R$  ist eine  $R$ -Untermodul von  $R$ . Im nichtkommutativen Fall ist die abelsche Quotientengruppe  $R/I$  nur dann wieder ein Ring, wenn  $I$  ein beidseitiges Ideal ist, d. h.  $rI = Ir$  für alle  $r \in R$  gilt.

Ist  $R$  ein Ring, so bezeichne  $R^{\text{op}}$  den oppositionellen Ring, d. h. den Ring mit derselben zu Grunde liegenden abelschen Gruppe, aber der verdrehten Multiplikation: Ist  $\mu: R \times R \rightarrow R$  die Multiplikation in  $R$ , so ist die Multiplikation in  $R^{\text{op}}$  gegeben durch  $(x, y) \mapsto \mu(y, x)$ .

Sind  $R$  und  $S$  zwei Ringe und  $f: R \rightarrow S$  eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften

$$f(1_R) = 1_S \quad \text{und} \quad f(xy) = f(y)f(x) \quad \text{für alle } x, y \in R,$$

## 1 Ringe und Moduln

so nennt man  $f$  einen *Anti-Homomorphismus*. Ein Anti-Homomorphismus ist also ein Homomorphismus von  $R^{\text{op}}$  nach  $S$  oder, äquivalent, von  $R$  nach  $S^{\text{op}}$ . Ist  $R$  oder  $S$  kommutativ, so sind die Begriffe Homomorphismus und Anti-Homomorphismus gleichbedeutend. Insbesondere gilt also, dass  $R$  und  $R^{\text{op}}$  stets anti-isomorph sind; ist  $R$  kommutativ, so ist  $R$  isomorph zu  $R^{\text{op}}$ .

Einen Modul über  $R^{\text{op}}$  bezeichnet man klassischerweise auch als *Rechtsmodul* über  $R$ , denn wenn man die Multiplikation mit Elementen  $x, y$  von  $R$  nach rechts schreibt, so erfüllt er  $(m \cdot x) \cdot y = m \cdot (xy)$ . Wir werden diese Schreibweise von rechts verwenden.

**Beispiel 1.1.1.** Der Ring  $\mathbf{Z}$  der ganzen Zahlen ist der *initiale Ring*: Für jeden Ring  $R$  gibt es genau einen Ringhomomorphismus von  $\mathbf{Z}$  nach  $R$ .

**Beispiel 1.1.2.** Der *terminale Ring* ist der Nullring  $\mathbf{0} = \{0\}$ , der einzige Ring, in dem  $1 = 0$  gilt.

**Beispiel 1.1.3.** Für einen kommutativen Ring  $R$  sind der Polynomring  $R[x]$  und der Potenzreihenring  $R[[x]]$  kommutative Ringe; die Elemente von  $R[x]$  sind die Polynome in einer Unbestimmten  $x$ , die Elemente von  $R[[x]]$  die Potenzreihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ,  $a_i \in R$ , mit der formal definierten Multiplikation. Konvergenz ist in diesem Zusammenhang unwichtig (und auch a priori nicht wohldefiniert).

**Beispiel 1.1.4.** Ein Beispiel für einen nichtkommutativen Ring ist der Gruppenring einer Gruppe (oder allgemeiner eines Monoids)  $G$ . Ist  $R$  ein kommutativer Ring, so definiere  $R[G]$  als den Ring der endlichen Summen  $\sum_{g \in G} r_g [g]$  mit  $r_g \in R$ . Die Addition ist definiert durch

$$\sum_{g \in G} r_g [g] + \sum_{g \in G} s_g [g] = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) [g],$$

die Multiplikation durch die Forderung der Bilinearität über  $R$  und

$$[g][g'] = [gg'].$$

Explizit heißt das, dass

$$\left( \sum_{g \in G} r_g [g] \right) \left( \sum_{g \in G} s_g [g] \right) = \sum_{g \in G} \sum_{g'g''=g} r_{g'} s_{g''} [g].$$

Dieser Ring ist genau dann kommutativ, wenn  $G$  abelsch ist.

**Beispiel 1.1.5.** Ein Modul über dem Ring  $\mathbf{Z}$  ist einfach eine abelsche Gruppe; ein Modul über  $\mathbf{Z}[x]$  ist eine abelsche Gruppe  $M$  zusammen mit einem Endomorphismus  $f: M \rightarrow M$ . Dieser ist gegeben durch  $f(m) = \mu(x, m)$ . Allgemeiner ist für ein Monoid  $G$  ein  $\mathbf{Z}[G]$ -Modul dasselbe wie eine abelsche Gruppe mit einer  $G$ -Operation.

## 1.2 Operationen auf Moduln und Ringen

Aus gegebenen Moduln und Ringen lassen sich auf vielfältige Weise neue konstruieren. In diesem Abschnitt werden einige solche Konstruktionen eingeführt bzw. wiederholt.

### 1.2.1 Operationen auf Moduln; das Tensorprodukt

**Definition.** Sei  $R$  ein Ring und  $M_i$  ( $i \in I$  für eine beliebige, auch unendliche, Indexmenge  $I$ ) Moduln über  $R$ . Dann ist das *Produkt*  $\prod_{i \in I} M_i$  definiert als der Modul der Tupel  $\{(m_i) \mid m_i \in M_i\}$  mit komponentenweiser Addition und „diagonaler“ Multiplikation:  $r \cdot (m_i)_{i \in I} = (r \cdot m_i)_{i \in I}$ .

Die (*direkte*) *Summe*  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  der Moduln ist definiert als die Teilmenge der  $(m_i)$  des direkten Produkts, für die  $m_i = 0$  für fast alle (d. h. alle bis auf endlich viele)  $i \in I$  gilt.

Es gibt kanonische  $R$ -Modulhomomorphismen

$$M_i \xrightarrow{j_i} \bigoplus_{i \in I} M_i \subseteq \prod_{i \in I} M_i \xrightarrow{p_i} M_i,$$

gegeben durch Inklusion der bzw. Projektion auf die *ite* Komponente.

**Lemma 1.2.1.** Die direkte Summe erfüllt die universelle Eigenschaft eines Koprodukts:

$$\text{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, N).$$

ist eine Bijektion (hier sogar ein Isomorphismus von abelschen Gruppen). Die Abbildung ist hierbei gegeben durch  $f \mapsto (f \circ j_i)_{i \in I}$  für  $f \in \text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} M_i, N)$ .

*Beweis.* Die umgekehrte Abbildung ist  $(f_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i \circ p_i$ . Die Summe ist endlich, denn nur endlich viele  $p_i(m)$  sind von null verschieden für  $m \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ .  $\square$

**Lemma 1.2.2.** Genauso erfüllt das Produkt die universelle Eigenschaft eines Produkts:

$$\text{Hom}_R\left(M, \prod_{i \in I} N_i\right) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M, N_i).$$

ist eine Bijektion (auch hier automatisch ein Isomorphismus von abelschen Gruppen).

Es bleibt dem Leser überlassen, die Abbildungen zu bestimmen und zu zeigen, dass sie Isomorphismen sind.

**Definition.** Sei  $M$  ein  $R^{\text{op}}$ -Modul und  $N$  ein  $R$ -Modul. Das *Tensorprodukt*  $M \otimes_R N$  ist definiert als die freie abelsche Gruppe erzeugt von den Paaren  $m \otimes n$  ( $m \in M, n \in N$ ), modulo den Relationen:

$$0 \otimes n = m \otimes 0 = 0 \quad \text{für alle } m, n \quad (1.2.3)$$

$$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n \quad \text{für alle } m_1, m_2, n \quad (1.2.4)$$

$$m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2 \quad \text{für alle } m, n_1, n_2 \quad (1.2.5)$$

$$(m \cdot r) \otimes n = m \otimes (r \cdot n) \quad \text{für alle } m \in M, n \in N, r \in R. \quad (1.2.6)$$

**Lemma 1.2.7.** Seien  $M, M_i$   $R^{\text{op}}$ -Moduln und  $N$  ein  $R$ -Modul.

$$1. \mathbf{0} \otimes_R N = M \otimes_R \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

## 1 Ringe und Moduln

2.  $R \otimes_R N \cong N$  und  $M \otimes_R R \cong M$ .
3.  $(\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_R N$ ; analog für die andere Seite.
4. Sei  $S$  ein weiterer Ring,  $Q$  ein  $S$ -Modul und  $P$  gleichzeitig ein  $R$ -Modul und ein  $S^{\text{op}}$ -Modul, so dass  $(r.p).s = r.(p.s)$  für alle  $p \in P$  gilt. Dann ist auf natürliche Weise  $M \otimes_R P$  ein  $S^{\text{op}}$ -Modul und  $P \otimes_S Q$  ein  $R$ -Modul, und es gilt:

$$(M \otimes_R P) \otimes_S Q \cong M \otimes_R (P \otimes_S Q).$$

*Beweis.* Die ersten beiden Punkte folgen unmittelbar aus (1.2.3) und (1.2.6). Die Distributivität (3) kann man wie folgt zeigen: Ein Morphismus

$$\Phi: \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_R N \rightarrow \left( \bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_R N$$

ist wegen Lemma 1.2.1 eindeutig durch seine Einschränkung auf jedes  $M_i$  gegeben; dort ist  $\Phi(m_i \otimes n) = j_i(m_i) \otimes n$ . Eine inverse Abbildung  $\Psi$  ist ebenfalls leicht anzugeben: Ein Element in  $(\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N$  ist eine Summe von Elementen der Form  $x = (\sum_{i \in I} j_i(m_i)) \otimes n$ , wobei  $m_i \in M_i$  ist und fast alle  $m_i = 0$ . Wegen (1.2.4) ist  $x = \sum_{i \in I} j_i(m_i) \otimes n$ ; wir definieren  $\Psi$  durch  $\Psi(j_i(m_i) \otimes n) = j_i(m_i \otimes n)$ .

Für die Assoziativität (4) definiert man die  $S^{\text{op}}$ -Modulstruktur auf  $M \otimes_R P$  durch  $(m \otimes p).s = m \otimes (p.s)$  und analog die  $R$ -Modulstruktur of  $P \otimes_S Q$ . Die Gleichheit ist damit tautologisch.  $\square$

Das Tensorprodukt hat auch universelle Eigenschaften, aber wir betrachten zunächst einige Beispiele.

**Beispiel 1.2.8.** Bezeichne mit  $\mathbf{Z}/n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  den  $\mathbf{Z}$ -Modul der ganzen Zahlen modulo  $n$ . Dann gilt:  $\mathbf{Z}/n \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/m \cong \mathbf{Z}/g$  mit  $g = \text{ggT}(n, m)$ . Denn: durch  $\phi: \mathbf{Z}/m \otimes \mathbf{Z}/n \rightarrow \mathbf{Z}/g$ ,  $\phi(m, n) = mn$ , wird ein Homomorphismus definiert, der wohldefiniert und surjektiv ist. Noch zu zeigen ist die Injektivität. Jedes Element in dem Tensorprodukt lässt sich schreiben als

$$x = [a_1] \otimes [b_1] + \cdots + [a_k] \otimes [b_k],$$

wobei  $a_i, b_i \in \mathbf{Z}$  Repräsentanten der Nebenklassen  $[a_i] \in \mathbf{Z}/n$ ,  $[b_i] \in \mathbf{Z}/m$  sind. Wegen der Bilinearität ist  $x = (a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k)(1_{\mathbf{Z}/n} \otimes 1_{\mathbf{Z}/m})$ . Also ist das Tensorprodukt eine zyklische Gruppe. Ist  $\phi(a(1 \otimes 1)) = 0$ , so ist  $a$  ein Vielfaches von  $g$ , und der euklidische Algorithmus liefert eine Zerlegung  $a = \alpha n + \beta m$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ . Somit gilt in  $\mathbf{Z}/n \otimes \mathbf{Z}/m$ :

$$a(1 \otimes 1) = \alpha([n] \otimes 1) + \beta(1 \otimes [m]) = 0.$$

**Beispiel 1.2.9.** Sei  $R$  ein Ring, und  $R^n = R \oplus \cdots \oplus R$  der freie Modul vom Rang  $n$ . Dann gilt:

$$R^m \otimes_R R^n \cong R^{mn}.$$

Dies folgt unmittelbar aus der allgemeineren Distributivitätsformel 1.2.7(3)

## 1.2 Operationen auf Moduln und Ringen

**Beispiel 1.2.10.** Ist  $R$  kommutativ, so gilt  $R[x] \otimes R[y] \cong R[x, y]$ , der Ring der Polynome in zwei Variablen, aufgefasst als abelsche Gruppe.

**Beispiel 1.2.11.** Das Tensorprodukt ist nicht distributiv bezüglich unendlicher direkter Produkte: Betrachte die abelsche Gruppe  $M = \prod_{n \geq 1} \mathbf{Z}/n$ . Einerseits ist  $\mathbf{Z}/n \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ , denn dort gilt

$$i \otimes q = (in) \otimes \frac{q}{n} = 0 \otimes \frac{q}{n} = 0,$$

und damit auch  $\prod_{n \geq 1} (\mathbf{Z}/n \otimes \mathbf{Q}) = \mathbf{0}$ . Andererseits ist das Element  $e \in \prod \mathbf{Z}/n$ , das in jeder Koordinate 1 ist, kein Torsionselement (kein Vielfaches ist 0), und damit ist  $0 \neq e \otimes 1 \in (\prod_{n \geq 1} \mathbf{Z}/n) \otimes \mathbf{Q}$ .

Die Beispiele 1.2.9 und 1.2.10 zeigen, dass man oft auf dem Tensorprodukt immer noch eine  $R$ -Modulstruktur hat. Dies gilt allgemein für kommutative Ringe:

**Lemma 1.2.12.** Ist  $R$  ein kommutativer Ring, und sind  $M, N$  zwei  $R$ -Moduln, so definiert

$$\mu(r, m \otimes n) = (r.m) \otimes n = m \otimes (r.n)$$

eine  $R$ -Modulstruktur auf  $M \otimes_R N$ . Außerdem definiert  $\mu(r, f)(m) = r.f(m)$  eine  $R$ -Modulstruktur auf  $\text{Hom}_R(M, N)$ .

Der Beweis ist klar.

**Proposition 1.2.13** (Universelle Eigenschaften des Tensorprodukts).

1. Sei  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R^{\text{op}}$ -Modul und  $N$  ein  $R$ -Modul und  $T$  eine abelsche Gruppe. Eine  $R$ -bilineare Abbildung  $f: M \times N \rightarrow T$  ist eine Funktion, die die Eigenschaften 1.2.3 bis 1.2.6 aus der Definition des Tensorprodukts erfüllt, wobei  $x \otimes y$  durch  $f(x, y)$  zu ersetzen ist. Bezeichne mit  $\text{Bil}_R(M, N; T)$  die abelsche Gruppe aller solcher bilinearen Abbildungen. Dann gilt:

$$\text{Bil}_R(M, N; T) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(M \otimes_R N, T).$$

2. Auf den abelschen Gruppen  $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, T)$  und  $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, T)$  sind  $R^{\text{op}}$ - bzw.  $R$ -Modulstrukturen definiert durch

$$(f.r)(n) = f(r.n); \quad (r.g)(m) = g(m.r) \quad (f: N \rightarrow T, g: M \rightarrow T, r \in R, m \in M, n \in N)$$

Damit gilt:

$$\text{Hom}_R(N, \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, T)) \xleftarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M \otimes_R N, T) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{R^{\text{op}}}(M, \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, T)).$$

*Beweis.* Der Beweis des ersten Punkts folgt unmittelbar aus der Definition des Tensorprodukts. Der zweite Teil ist eine Umformulierung des ersten, denn ein Element aus  $\text{Hom}_R(N, \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, T))$  bzw.  $\text{Hom}_{R^{\text{op}}}(M, \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, T))$  ist nichts anderes als eine bilineare Abbildung  $M \times N \rightarrow T$ . □

## 1 Ringe und Moduln

### 1.2.2 Operationen auf Ringen

Sind  $R, S$  Ringe, so tragen das Produkt  $R \times S$  und das Tensorprodukt  $R \otimes_{\mathbf{Z}} S$  wiederum eine Ringstruktur:

$$\begin{aligned} \text{auf } R \times S: & \quad (r, s)(r', s') = (rr', ss') \\ \text{auf } R \otimes_{\mathbf{Z}} S: & \quad (r \otimes s)(r' \otimes s') = (rr') \otimes (ss') \end{aligned}$$

Ist  $M$  ein  $R$ -Modul und  $N$  ein  $S$ -Modul, so ist in natürlicher Weise  $M \times N$  ein  $R \times S$ -Modul und  $M \otimes_{\mathbf{Z}} N$  ein  $R \otimes S$ -Modul.

Genauso kann man das Produkt von unendlich vielen Ringen definieren. **Frage:** Warum ist die unendliche direkte Summe von Ringen kein Ring?

Es ist auch möglich, unendliche Tensorprodukte zu definieren. Der interessierte Leser kann die Definition aus der folgenden Proposition ableiten, wir machen aber im Weiteren keinen Gebrauch davon.

**Proposition 1.2.14.** *Das Produkt  $\prod_{i \in I} R_i$  von Ringen  $R_i$ ,  $I$  eine beliebige Indexmenge, erfüllt die universelle Eigenschaft eines Produkts:*

$$\text{Alg}\left(S, \prod_{i \in I} R_i\right) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} \text{Alg}(S, R_i) \text{ für alle Ringe } S$$

Sind  $R_1$  und  $R_2$  kommutativ, so erfüllt das Tensorprodukt  $R_1 \otimes_{\mathbf{Z}} R_2$  dagegen die universelle Eigenschaft eines Koproducts von kommutativen Ringen:

$$\text{Alg}(R_1 \otimes_{\mathbf{Z}} R_2, S) \xrightarrow{\cong} \text{Alg}(R_1, S) \times \text{Alg}(R_2, S).$$

für alle kommutativen Ringe  $S$ .

Der unschwere Beweis ist dem Leser als Übung überlassen.

### 1.3 Frei, projektiv, flach, teilbar, injektiv

In diesem Abschnitt werden einige wichtige Klassen von  $R$ -Moduln eingeführt. Zunächst ist es hilfreich, sich eine diagrammatische Sprache anzueignen.

**Definition.** Sei  $R$  ein Ring. Eine Folge von  $R$ -Moduln und Abbildungen

$$\cdots \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_0} M_0 \xrightarrow{f_{-1}} M_{-1} \rightarrow \cdots$$

nennen wir *Sequenz*. Eine Sequenz heißt  *$R$ -Kettenkomplex*, falls  $f_i \circ f_{i+1} = 0$  für alle  $i \in \mathbf{Z}$  gilt. Eine Sequenz heißt *exakt*, falls  $\ker(f_i) = \text{im}(f_{i+1})$  für alle  $i \in \mathbf{Z}$  gilt.

Die Kettenkomplexbedingung lässt sich auch umformulieren als  $\text{im}(f_{i+1}) \subseteq \ker(f_i)$ . Analog lassen sich endliche oder halb-unendliche Sequenzen definieren; Exaktheit wird dann nur dort gefordert, wo sie definierbar ist. (Z. B. ist jede 2-teilige Sequenz  $M \rightarrow N$  exakt, weil es keine zusammensetzbaren Abbildungen in ihr gibt.)

### 1.3 Frei, projektiv, flach, teilbar, injektiv

**Notation.** In einem Kettenkomplex  $(M_n, f_n)$  nennt man  $f_n$  üblicherweise das *Differenzial* und verwendet den Buchstaben  $d$ . Für einen Kettenkomplex schreibe ich durchweg  $M_\bullet$ ; der schwarze Punkt deutet an, dass es sich um einen  $\mathbb{Z}$ -graduierten Kettenkomplex handelt, dessen Differenzial  $d$  oder  $d_M$  heißt. Das Zeichen  $\bullet$  steht nie für etwas anderes als den Index eines Kettenkomplexes.

Von besonderem Interesse in der homologischen Algebra sind die *kurzen exakten Sequenzen*: Dies sind exakte Sequenzen von der Form

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$$

Explizit heißt das:  $i$  ist injektiv (Exaktheit bei  $M'$ ),  $p$  ist surjektiv (Exaktheit bei  $M''$ ) und  $M' = \ker(p)$  (Exaktheit bei  $M$ ).

**Proposition 1.3.1.** Sei  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

1.  $i$  hat eine Retraktion, d. h. es gibt eine Abbildung  $\pi: M \rightarrow M'$  mit der Eigenschaft  $\pi \circ i = \text{id}_{M'}$ .
2.  $p$  hat einen Schnitt, d. h. es gibt eine Abbildung  $s: M'' \rightarrow M$  mit der Eigenschaft  $p \circ s = \text{id}_{M''}$ .
3.  $M$  ist isomorph zu  $M' \oplus M''$ .

*Beweis.* Übung. □

Eine exakte Sequenz, die diese Eigenschaften erfüllt, *zerfällt*. (Allgemeiner üblich ist das Wort *spalten*, das aber im Deutschen, im Gegensatz zum Englischen, nur transitiv gebraucht werden kann. D. h., „Die Sequenz spaltet.“ ist grammatikalisch inkorrekt.)

Ein *freier  $R$ -Modul* ist per Definition einer, der isomorph ist zu  $\bigoplus_{i \in I} R$  für irgendeine Indexmenge  $I$ . **Frage:** Ist  $I$  wohldefiniert? Das heißt, kann  $\bigoplus_{i \in I} R \cong \bigoplus_{i \in I'} R$  gelten für Indexmengen  $I, I'$  von verschiedener Kardinalität?

Eine Verallgemeinerung von freien Moduln sind *projektive Moduln*, die durch die folgende Proposition charakterisiert werden:

**Proposition 1.3.2.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen  $R$ -Modul  $M$ :

1. Für jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M & & \\
 & & \downarrow & & \\
 N_1 & \xrightarrow{\quad} & N_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & \nearrow k & & & 
 \end{array}$$

mit exakter Zeile gibt es eine *Hochhebung* (gepunktet gekennzeichnet), so dass das Diagramm kommutiert.

2. Es gibt einen  $R$ -Modul  $N$ , so dass  $M \oplus N$  frei ist.

## 1 Ringe und Moduln

### 3. Jede kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow M \rightarrow 0$$

zerfällt.

### 4. Für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow T'' \rightarrow 0$$

ist auch die Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, T') \rightarrow \text{Hom}_R(M, T) \rightarrow \text{Hom}_R(M, T'') \rightarrow 0$$

exakt.

Die erste Aussage, ein wenig im Slang der homologischen Algebra gehalten, besagt nichts anderes, als dass die Abbildung  $\text{Hom}_R(M, N_1) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N_2)$ , die von  $N_1 \rightarrow N_2$  induziert wird, surjektiv ist. Diese Proposition illustriert auch, dass man es in der homologischen Algebra gern vermeidet, Morphismen Namen zu geben.

*Beweis.* (1) $\Rightarrow$ (3): Die Spaltung ist gegeben durch die Hochhebung in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow & \parallel \\ N_2 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

(3) $\Rightarrow$ (2): Für jeden  $R$ -Modul  $M$  gibt es eine surjektive Abbildung von einem freien Modul (als Extremkonstruktion könnte man zum Beispiel  $\bigoplus_{m \in M} R$  nehmen). Sei  $N_2 \rightarrow M$  eine solche Surjektion mit Kern  $N_1$ . Da die exakte Sequenz zerfällt, gilt  $N_2 \cong M \oplus N_1$ , und  $N_2$  ist frei.

(2) $\Rightarrow$ (4): Zunächst beobachtet man leicht, dass (4) immer gilt, wenn  $M$  frei ist. (Denn dann ist  $\text{Hom}_R(M, N) = \prod_{i \in I} N$ , wenn  $I$  die Indexmenge einer Basis von  $M$  ist.)

Also gilt, dass

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M \oplus N, T') \rightarrow \text{Hom}_R(M \oplus N, T) \rightarrow \text{Hom}_R(M \oplus N, T'') \rightarrow 0$$

exakt ist. Nach der universellen Koprodukteigenschaft ist dies aber isomorph zu

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, T') \times \text{Hom}_R(N, T') &\rightarrow \text{Hom}_R(M, T) \times \text{Hom}_R(N, T) \\ &\rightarrow \text{Hom}_R(M, T'') \times \text{Hom}_R(N, T'') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Da der Kern (das Bild) eines Produkts von Abbildungen das Produkt des Kerns (des Bilds) der einzelnen Abbildungen ist, folgt daraus die Exaktheit der Sequenz in (4).

(4) $\Rightarrow$ (1): trivial, mit  $T'' = N_2$ ,  $T = N_1$ ,  $T' = \ker(N_2 \rightarrow N_1)$ . □

### 1.3 Frei, projektiv, flach, teilbar, injektiv

Freie Moduln sind projektiv, aber darüber hinaus muss man etwas nachdenken, um weitere Beispiele zu finden. Für  $R = \mathbf{Z}$  ist jeder projektive Modul frei, denn Untermoduln von freien Moduln sind hier frei, und insbesondere alle direkten Summanden. Das gleiche gilt für jeden Hauptidealring  $R$ .

**Beispiel 1.3.3.** Für  $R = R_1 \times R_2$  ist der Modul  $M = R_1$  mit  $(r_1, r_2) \cdot m = r_1 m$  projektiv, aber offensichtlich nicht frei.

**Beispiel 1.3.4.** Beispiele für projektive, nicht freie Moduln über nullteilerfreie Ringen  $R$  sind etwas schwieriger zu finden, wenn man nicht auf algebraisch-geometrische Methoden zurückgreifen will. Hier ist eines: Sei  $\tau = \sqrt{-5}$  und  $R = \mathbf{Z}[\tau]$ , und sei  $M = (2, 1 + \tau) \triangleleft R$ , aufgefasst als  $R$ -Modul. Zunächst zeigen wir, dass  $M$  nicht frei ist. Angenommen,  $M$  wäre frei. Dann kann der Rang nicht 2 sein, denn in dem Fall müssten 2 und  $1 + \tau$  linear unabhängig über  $R$  sein, was sie nicht sind ( $3 \cdot 2 = (1 - \tau)(1 + \tau)$ ). Also ist  $M$  genau dann frei, wenn es ein Hauptideal ist, also  $M = (a)$  für ein  $a \in R$  mit  $a \mid 2$  und  $a \mid 1 + \tau$ . Wir zeigen, dass 2 unzerlegbar in  $R$  ist. Dazu definiere die Normabbildung  $N: R \rightarrow \mathbf{Z}$  durch  $N(x + \tau y) = x^2 + 5y^2$ . Die Norm ist multiplikativ, daher  $N(a) \mid N(2) = 4$ . Also muss  $N(a) = 2$  gelten. Aber falls  $a = x + \tau y$ , so ist  $N(a) = x^2 + 5y^2 = 2$  unlösbar in  $\mathbf{Z}$ .

Um zu zeigen, dass  $M$  dennoch projektiv ist, betrachten wir die Surjektion

$$\begin{aligned} p: R \oplus R &\rightarrow M \\ (r_1, r_2) &\mapsto 2r_1 + (1 + \tau)r_2. \end{aligned}$$

Dieser Epimorphismus hat einen Schnitt: definiere

$$s(2x + (1 + \tau)y) = (-2x - (1 + \tau)y, (1 - \tau)x + 3y).$$

Damit ist  $s$  wohldefiniert (überprüfe!) und  $p \circ s = \text{id}_M$ .

**Proposition 1.3.5.** Sei  $M$  ein  $R^{\text{op}}$ -Modul und  $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Dann ist

$$M \otimes_R N' \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N'' \rightarrow 0$$

immer exakt, und falls  $M$  projektiv ist, so ist auch

$$0 \rightarrow M \otimes_R N' \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N'' \rightarrow 0 \quad (1.3.6)$$

exakt.

*Beweis.* Für den ersten Teil muss die Exaktheit bei  $M \otimes_R N''$  und bei  $M \otimes_R N$  gezeigt werden. Sei  $x = \sum m_i \otimes n_i'' \in M \otimes_R N''$ . Da  $N \rightarrow N''$  surjektiv ist, gibt es Urbilder  $n_i \in N$ . Dann wird das Element  $\sum m_i \otimes n_i$  auf  $x$  abgebildet unter  $M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N''$ , und die Surjektivität ist gezeigt.

Für die Exaktheit an der anderen Stelle sei

$$Q = \text{coker}(M \otimes_R N' \rightarrow M \otimes_R N) = (M \otimes_R N) / \text{im}(M \otimes_R N' \rightarrow M \otimes_R N).$$

## 1 Ringe und Moduln

Wir erhalten eine wohldefinierte kanonische Abbildung  $M \otimes_R N'' \rightarrow Q$ , gegeben durch  $m \otimes n'' \mapsto [m \otimes n]$ , wobei  $n$  eine Hochhebung von  $n''$  ist. Wir müssen zeigen, dass es ein Isomorphismus ist. In der Tat liefert die Abbildung  $[m \otimes n] \mapsto m \otimes [n]$  ein wohldefiniertes Inverses.

Für den zweiten Teil der Proposition bleibt zu zeigen, dass injektive Abbildungen injektiv bleiben, wenn man  $M \otimes_R -$  anwendet. Wegen der Distributivität von  $\otimes_R$  und Proposition 1.3.2(2) dürfen wir annehmen, dass  $M$  sogar frei ist, d. h.  $M = \bigoplus_{i \in I} R$ . Dann, wiederum wegen der Distributivität, gilt:

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_R N' & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \bigoplus_{i \in I} N' & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} N \end{array}$$

Hier haben wir verwendet, dass  $R \otimes_R N \cong N$  für alle  $N$  gilt. Die untere Zeile ist natürlich genau dann injektiv, wenn  $N' \rightarrow N$  es war.  $\square$

**Definition.** Ein  $R$ -Modul  $M$  heißt *flach*, falls der Funktor  $- \otimes_R M$  kurze exakte Sequenzen erhält, oder äquivalent, wenn er Injektivität von Abbildungen erhält.

Die vorhergehende Proposition (mit vertauschten Seiten des Tensorprodukts) hat gezeigt, dass alle projektiven Moduln flach sind, aber auch hier gibt es flache Moduln, die nicht projektiv sind:

**Beispiel 1.3.7.** Der  $\mathbf{Z}$ -Modul  $\mathbf{Q}$  ist flach, denn wenn  $0 \rightarrow M' \rightarrow M$  injektiv ist, so ist der Kern von  $M' \rightarrow M \rightarrow M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  genau die Menge der  $m' \in M'$ , deren Bild in  $M$  Torsion ist. Wegen der Injektivität kann das nur passieren, wenn  $m'$  selbst schon Torsion war; somit ist  $m' = 0 \in M' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ .

Andererseits ist  $\mathbf{Q}$  nicht projektiv über  $\mathbf{Z}$ ; andernfalls müsste es in einen freien  $\mathbf{Z}$ -Modul eingebettet werden können, was unmöglich ist, das  $\mathbf{Q}$  teilbar ist.

Dual zur Definition von projektiven Moduln ist der Begriff des injektiven Moduls. Der Beweis der folgenden Proposition ist völlig analog zum Beweis von Proposition 1.3.2 und wird hier nicht mehr wiederholt.

**Proposition 1.3.8.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen  $R$ -Modul  $M$ :

1. Für jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 \\ & & \downarrow & \swarrow \text{dotted} & \\ & & M & & \end{array}$$

mit exakter Zeile gibt es eine Hochhebung (gepunktet gekennzeichnet), so dass das Diagramm kommutiert.

2. Jede kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow 0$$

zerfällt.

3. Für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow T'' \rightarrow 0$$

ist auch die Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(T'', M) \rightarrow \text{Hom}_R(T, M) \rightarrow \text{Hom}_R(T', M) \rightarrow 0$$

exakt.

Eine ähnlich hübsche Unterklasse wie die der freien Moduln unter den projektiven Moduln gibt es bei Injektiven nicht. Für  $R = \mathbf{Z}$  jedoch ist ein Modul  $M$  genau dann injektiv, wenn er *teilbar* ist, d. h. wenn für jedes  $0 \neq n \in \mathbf{Z}$  die Abbildung  $M \rightarrow M$ , die durch Multiplikation mit  $n$  gegeben ist, surjektiv ist. Insbesondere sind die abelschen Gruppen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  injektiv. Dies ist ein Spezialfall des folgenden nützlichen Kriteriums.

**Lemma 1.3.9** (Satz von Baer). *Ein  $R$ -Modul  $M$  ist genau dann injektiv, wenn er für jedes Ideal  $\mathfrak{p} \triangleleft R$  die Hochhebungseigenschaft hat:*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{p} & \longrightarrow & R \\ & & \downarrow & \nearrow & \\ & & M & & \end{array}$$

*Insbesondere ist eine abelsche Gruppe genau dann injektiv, wenn sie teilbar ist, d. h. Multiplikation mit  $n \in \mathbf{Z} - 0$  surjektiv ist.*

*Beweis.* Für nicht endlich erzeugte  $M$  ist dies eine Anwendung des Zornschen Lemmas. Sei  $0 \rightarrow N' \rightarrow N$  ein Monomorphismus von  $R$ -Moduln,  $f: N' \rightarrow M$  und

$$X = \{(K, g) \mid N' \leq K \leq N, g: K \rightarrow M \text{ ist Fortsetzung von } f\}$$

partiell geordnet durch

$$(K, g) \leq (K', g') \Leftrightarrow K \leq K' \text{ und } g'|_K = g.$$

Dann hat  $X$  ein maximales Element  $g: K \rightarrow M$ , und wir müssen zeigen, dass  $K = N$ . Andernfalls sei  $n \in N - K$  und  $\mathfrak{p} = \{r \in R \mid r.n \in K\}$ . Nach Voraussetzung gibt es eine Fortsetzung  $\tilde{g}: R \rightarrow M$  von  $\mathfrak{p} \xrightarrow{g \circ m} M$ . Sei nun

$$K' = K + mR < N; \quad g'(k + mr) = g(k) + \tilde{g}(r).$$

Dann ist  $(K', g') > (K, g)$ , ein Widerspruch. □

## Übungen

### 1.3.10 ( $p$ -lokale und $p$ -adische Zahlen).

1. Sei  $p$  eine Primzahl und  $\mathbf{Z}_{(p)} \subseteq \mathbf{Q}$  der Ring derjenigen Brüche  $\frac{n}{q}$ , für die  $p \nmid q$ . Definiere weiterhin  $\mathbf{Z}/p^\infty = \bigcup_{i \geq 0} \mathbf{Z}/p^i$ , wobei  $\mathbf{Z}/p^i \hookrightarrow \mathbf{Z}/p^{i+1}$  eindeutig gegeben ist. Zeige, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}_{(p)} \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Z}/p^\infty \rightarrow 0$$

gibt, die nicht zerfällt.

2. Definiere den Ring  $\mathbf{Z}_p = \text{End}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^\infty) = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p^\infty, \mathbf{Z}/p^\infty)$ . Zeige, dass es eine eindeutige injektive Ringabbildung  $\mathbf{Z}_{(p)} \rightarrow \mathbf{Z}_p$  gibt, und dass  $\mathbf{Z}_p$  flach über  $\mathbf{Z}_{(p)}$  ist.

Der Ring  $\mathbf{Z}_{(p)}$  heißt Ring der  $p$ -lokalen ganzen Zahlen, der Ring  $\mathbf{Z}_p$  der  $p$ -adischen Zahlen.

**1.3.11** (Produkte von freien Moduln). Sei  $M = \prod_{i \geq 0} \mathbf{Z}$ . Zeige, dass  $M$  keine freie abelsche Gruppe ist. *Tipp*: Zeige zunächst, dass die Abbildung  $\bigoplus_{i \geq 0} \mathbf{Z} \rightarrow \text{Hom}(M, \mathbf{Z})$ , die  $(a_0, a_1, \dots)$  abbildet auf  $x \mapsto a_0x_0 + a_1x_1 + \dots$  (die Summe ist endlich), ein Isomorphismus ist. Falls nun  $M \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbf{Z}$  ein Isomorphismus wäre, so müsste  $J$  überabzählbar sein, und  $\text{Hom}(\bigoplus_{j \in J} \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \prod_{j \in J} \mathbf{Z}$  wäre wiederum überabzählbar.

**1.3.12** (Endlich präsentierte Moduln). Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul.  $M$  ist genau dann endlich erzeugt, wenn es einen freien  $R$ -Modul  $F$  von endlichem Rang mit einer surjektiven Abbildung  $F \xrightarrow{p} M$  gibt. Wenn  $F$  und  $p$  so gewählt werden können, dass  $\ker p$  ebenfalls endlich erzeugt ist, so heißt  $M$  endlich präsentiert. Bezeichne mit  $M^*$  den  $R^{\text{op}}$ -Modul  $\text{Hom}_R(M, R)$ , wobei die Modulstruktur gegeben ist durch  $(f \cdot r)(m) = f(m)r$ .

1. Für alle  $R$ -Moduln  $M, N$  gibt es eine natürliche Abbildung

$$\begin{aligned} a: M^* \otimes_R N &\rightarrow \text{Hom}_R(M, N) \\ f \otimes n &\mapsto (m \mapsto f(m)n) \end{aligned}$$

Zeige, dass  $a$  ein Isomorphismus für endlich präsentierte, projektive  $R$ -Moduln  $M$  ist ( $N$  beliebig). (Ein Modul  $M$ , für den  $a$  ein Isomorphismus für alle  $N$  ist, heißt dualisierbar.)

2. Zeige, dass jeder endlich präsentierte, flache  $R$ -Modul projektiv ist.

**1.3.13** (Selbstinjektive Ringe). Sei  $k$  ein Körper und  $G$  eine endliche Gruppe. Zeige, dass die Klasse der injektiven und die Klasse der projektiven endlich erzeugten  $k[G]$ -Moduln übereinstimmen (ein solcher Ring heißt selbstinjektiv). Gib ein Beispiel, wo das nicht der Fall ist, wenn  $k$  kein Körper ist, sondern nur ein Ring, und eines, wo  $G$  eine unendliche Gruppe ist.

*Bemerkung*: Die Aussage ist auch wahr, wenn man „endlich erzeugt“ weglässt; dies ist ein Satz von Faith und Walker [FW67].

## 2 Kategorien und Funktoren

In diesem Kapitel werden die grundlegendsten Begriffe aus der Kategorientheorie eingeführt. Hierbei handelt es sich in erster Linie um eine Sprache, um algebraische Sachverhalte kompakt auszudrücken; die abstrakte Herangehensweise vereinfacht aber vor allem später Beweise erheblich, die explizit ausgedrückt sehr unübersichtlich würden.

### 2.1 Kategorien

Eine Kategorie verallgemeinert die algebraische Struktur, die man oft gegeben hat, wenn man eine bestimmte Klasse von Objekten (z. B. Mengen, Gruppen,  $R$ -Moduln, geordnete Mengen) zusammen mit einer zugehörigen Klasse von strukturerhaltenden Abbildungen studieren möchte (Funktionen, Gruppenmorphismen,  $R$ -Modulmorphismen, monotone Abbildungen).

**Definition.** Eine *Kategorie*  $\mathcal{C}$  besteht aus einer Klasse  $\text{ob } \mathcal{C}$  von *Objekten* und einer Klasse  $\text{mor } \mathcal{C}$  von *Morphismen*, zusammen mit den folgenden Strukturabbildungen:

1. Eine *Identitätsabbildung*  $i: \text{ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{mor } \mathcal{C}$ ,
2. *Quell- und Zielabbildungen*  $s, t: \text{mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{ob } \mathcal{C}$ ,
3. eine *Kompositionsabbildung*  $\circ: \text{mor } \mathcal{C} \times_{\text{ob } \mathcal{C}} \text{mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{mor } \mathcal{C}$ . Hierbei steht die Quelle für diejenigen Paare  $(x, y) \in \text{mor } \mathcal{C} \times \text{mor } \mathcal{C}$ , für die  $s(x) = t(y)$  gilt.

Diese Abbildungen müssen folgende Axiome erfüllen:

1.  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) := \{f \in \text{mor } \mathcal{C} \mid s(f) = a, t(f) = b\}$  ist eine Menge und keine echte Klasse.
2.  $s \circ i = t \circ i = \text{id}_{\text{ob } \mathcal{C}}$  („Quelle und Ziel der Identität auf  $X$  sind  $X$  selbst“)
3.  $s(a \circ b) = s(b)$ ,  $t(a \circ b) = t(a)$  („Ziel einer Komposition ist das Ziel der zuletzt angewandten Funktion, Quelle die der zuerst angewandten Funktion“)
4.  $i(t(f)) \circ f = f$ ,  $f \circ i(s(f)) = f$  („Komposition mit Identitätsmorphismen ist die Identität“)
5.  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$  wann immer das definiert ist (Assoziativität).

## 2 Kategorien und Funktoren

Das erste Beispiel ist die Kategorie Set der Mengen:  $\text{ob Set}$  ist die Klasse aller Mengen,  $\text{Hom}_{\text{Set}}(X, Y)$  ist die Menge (nicht Klasse!) aller Funktionen von  $X$  nach  $Y$ . Die Strukturrabbildungen sind gegeben durch  $i(X) = \text{id}_X$ ,  $f \circ g$  ist die gewöhnliche Komposition von Funktionen, für  $f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(X, Y)$  ist  $s(f) = X$  und  $t(f) = Y$ . In ähnlicher Weise definieren wir die Kategorie Ab der abelschen Gruppen, die Kategorien  $\text{Mod}_R$  der  $R$ -Moduln und  $\text{Alg}_R$  der  $R$ -Algebren, d. h. Ringe  $S$  mit einer Ringabbildung  $R \rightarrow S$ .

In all diesen Beispielen bilden die Objekte eine echte Klasse, also keine Menge (es gibt z. B. keine Menge aller Mengen). Dennoch gibt es auch wichtige Kategorien von einem anderen Typ, bei denen die Objekte eine Menge bilden; man nennt eine solche Kategorie *klein*. Die leere Kategorie und die Kategorie mit genau einem Objekt und dem dazugehörigen Identitätsmorphismus sind die beiden kleinsten Kategorien. Wichtig sind auch die kleinen Kategorien, die zu geordneten Mengen gehören: Ist  $(S, \leq)$  eine (partiell) geordnete Menge, so definiert sie eine Kategorie mit  $\text{ob } S = S$  und

$$\text{Hom}_S(x, y) = \begin{cases} \{*\}, & \text{falls } x \leq y \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Komposition ist damit eindeutig (es gibt immer höchstens eine Abbildung zwischen je zwei Objekten.)

Wie im Kapitel über Moduln sind auch mit Kategorien viele Operationen möglich.

**Definition.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Die Kategorie  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  ist die Kategorie mit denselben Objekten, aber  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(a, b) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(b, a)$ , und die Komposition ist entsprechend verdreht definiert:  $f \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} g = g \circ_{\mathcal{C}} f$ .

Die Kategorie  $\mathcal{C} \amalg \mathcal{D}$  ist die Kategorie, deren Objekte und Morphismen die disjunkten Vereinigungen derer von  $\mathcal{C}$  und von  $\mathcal{D}$  sind; genauso ist  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  die kartesische Produkt-Kategorie. Klar ist, dass auch hier unendliche disjunkte Vereinigungen bzw. Produkte konstruierbar sind.

Wann immer man algebraische Objekte definiert, sollte man deren Transformationen gleich mitdefinieren. Das ist in Kategorien schon fest verdrahtet, aber Kategorien selbst haben auch Transformationen, die man in diesem Fall Funktoren nennt. (Man könnte also sagen, dass die Kategorien zusammen mit den Funktoren selbst eine Kategorie bilden. Allerdings ist das aus mengentheoretischen Gründen nicht ganz korrekt: Die Klasse der Funktoren zwischen zwei gegebenen Kategorien ist im Allgemeinen keine Menge, also ist Axiom (1) verletzt. Das kann umgangen werden mit dem Begriff der 2-Kategorie, oder allgemeiner  $n$ -Kategorien, einem Feld aktiver Forschung.)

**Definition.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Ein *Funktor*  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ordnet jedem Objekt von  $c \in \text{ob } \mathcal{C}$  ein Objekt  $F(c) \in \text{ob } \mathcal{D}$  zu, sowie jedem Morphismus  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$  einen Morphismus  $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), F(c'))$ . Es muss gelten:

1.  $F(\text{id}_c) = \text{id}_{F(c)}$
2.  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ .

Interessanterweise gibt es auch „Funktoen zwischen Funktoen“, diese heißen natürliche Transformationen; höhere Ebenen von Funktoen gibt es jedoch nicht. Sind  $F, G$  Funktoen von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$ , so ist eine *natürliche Transformation*  $N: F \rightsquigarrow G$  eine Zuordnung von einem Morphismus  $N(c): F(c) \rightarrow G(c)$  für jedes Objekt  $c \in \text{ob } \mathcal{C}$ , so dass für jeden Morphismus  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$  das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{N(c)} & G(c) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(c') & \xrightarrow{N(c')} & G(c') \end{array}$$

- Beispiel 2.1.1.**
1. Der Funktor  $\amalg: \text{Set} \times \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ , der zwei Mengen  $X, Y$  die Menge  $X \amalg Y$  zuordnet; ebenso der Funktor  $\amalg$ ;
  2. der Funktor  $\otimes_R: \text{Mod}_{R^{\text{op}}} \times \text{Mod}_R \rightarrow \text{Ab}$ ;
  3. der Funktor  $U: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Ab}$ , der einem  $R$ -Modul die zugrundeliegende abelsche Gruppe zuordnet (Funktoen dieser Art heißen Vergissfunktoen)
  4. Bezeichnet  $[n]$  die total geordnete Menge  $\{0, \dots, n\}$ , so ist ein Funktor  $[n] \rightarrow \text{Mod}_R$  das gleiche wie eine Sequenz  $R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow \dots \rightarrow R_n$ ; eine natürliche Transformation zwischen zwei solchen Funktoen  $R$  und  $S$  ist ein kommutatives Diagramm

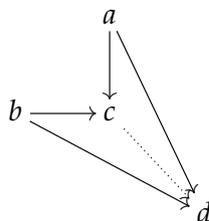
$$\begin{array}{ccccccc} R_0 & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R_n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ S_0 & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_n \end{array}$$

Die Kategorien der  $R$ -Moduln haben noch deutlich mehr Struktur, als in den vorhergehenden Definitionen festgehalten wurde. Im Wesentlichen ist dies die Tatsache, dass  $\text{Hom}_R(M, N)$  nicht nur eine Menge, sondern sogar eine abelsche Gruppe ist.

**Definition.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $a_i \in \mathcal{C}$  ( $i \in I$  für eine Indexmenge  $I$ ). Ein Objekt  $c \in \mathcal{C}$  zusammen mit Morphismen  $a_i \rightarrow c$  heißt *Koprodukt* der  $a_i$ , und  $c$  wird mit  $\coprod_{i \in I} a_i$  bezeichnet, wenn für jedes Objekt  $d$  die Morphismen einen Isomorphismus von Mengen induzieren:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a_i, d)$$

Mit anderen Worten (für nur zwei Objekte  $a, b$ ): für jedes Diagramm



## 2 Kategorien und Funktoren

existiert ein eindeutiger gepunkteter Morphismus, so dass alles kommutiert.

Analog ist das Produkt  $c = \prod_{i \in I} a_i$  charakterisiert: es hat Morphismen  $c \rightarrow c_i$ , so dass für alle  $d$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(d, c) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(d, a_i)$$

ein Isomorphismus ist.

Nicht jede Kategorie hat alle Produkte und Koprodukte, aber wenn eines existiert, so folgt aus den Axiomen, dass es bis auf Isomorphie eindeutig ist.

**Beispiel 2.1.2.** 1. In der Kategorie der  $R$ -Moduln sind die direkte Summen und Produkte kategorielle Koprodukte bzw. Produkte; dies ist der Inhalt der Lemmata 1.2.1 und 1.2.2.

2. Proposition 1.2.14 besagt, dass das kartesische Produkt von Ringen auch ein kategorielles Produkt ist; das Tensorprodukt dagegen ist das Koprodukt in der Kategorie der kommutativen Ringe, nicht aber in der Kategorie aller Ringe (**Warum?**).

3. In der Kategorie der total geordneten Mengen und monotonen Funktionen gibt es weder Produkte noch Koprodukte, außer, wenn einer der Faktoren die leere Menge ist.

## Übungen

**2.1.3** (Partiell geordnete Mengen). Sei  $(X, \leq)$  eine partiell geordnete Menge, aufgefasst als Kategorie. Wann sind in  $X$  Produkte und Koprodukte definiert, und wie lassen sie sich explizit beschreiben?

**2.1.4** (Über- und Unter-Kategorien). Sei  $c_0 \in \mathcal{C}$  ein Objekt in einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Die Kategorie  $\mathcal{C} \downarrow c_0$  der Objekte über  $c_0$  ist definiert als die Kategorie, deren Objekte Paare  $(x, f)$  sind mit  $x \in \text{ob } \mathcal{C}$  und  $f: x \rightarrow c_0$ , und deren Morphismen kommutative Diagramme 
$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & y \\ \searrow & & \swarrow \\ & c_0 & \end{array}$$
 sind. Analog ist die Kategorie  $c_0 \downarrow \mathcal{C}$  der Objekte unter  $c_0$  definiert, deren

Objekte Paare  $(x, f)$  sind mit  $f: c_0 \rightarrow x$ .

Betrachte die folgenden Kategorien:

1.  $\text{Mod}_R$  für einen Ring  $R$ ;
2.  $\text{Alg}$ , die Kategorie der Ringe;
3.  $\text{Grp}$ , die Kategorie der Gruppen.

Bestimme in allen Fällen, für welche Objekte  $c_0$  die Über-Kategorie Produkte hat (die dann *Pullbacks* oder *Faserprodukte* genannt werden) und die Unter-Kategorie Koprodukte hat (die dann *Pushouts* oder *amalgamierte Summen* genannt werden), und wie sich diese explizit konstruieren lassen.

## 2.2 Abelsche Kategorien

**Definition.** Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt *additiv*, falls

1. alle Hom-Mengen abelsche Gruppen sind und  $\circ$  bilinear ist;
2.  $\mathcal{C}$  alle endlichen Produkte und Koprodukte hat.

Man beachte, dass auch die Existenz des leeren Produkts und Koprodukts gefordert ist – das bedeutet, dass es ein *initiales Objekt*  $0 \in \mathcal{C}$  gibt, das genau einen Morphismus in jedes andere Objekt hat, und ein *terminales Objekt*  $*$   $\in \mathcal{C}$ , das genau einen Morphismus aus jedem anderen Objekt empfängt. Für jedes Objekt  $c \in \mathcal{C}$  gilt aber  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, 0) = \{0\}$ , denn  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0) = \{0\}$ ; damit ist  $0$  terminal, und  $0 \cong *$ .

**Definition.** Sei  $f: a \rightarrow b$  ein Morphismus in einer additiven Kategorie  $\mathcal{C}$ . Eine Abbildung  $i: k \rightarrow a$  heißt *Kern* von  $f$ , und wir schreiben  $i = \ker(f)$ , falls für alle  $d \in \mathcal{C}$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(d, k) \xrightarrow{i_*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(d, a) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(d, b)$$

eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen ist. Analog heißt eine Abbildung  $p: b \rightarrow c$  *Kokern* von  $f$  ( $c = \text{coker}(f)$ ), falls für alle  $d \in \mathcal{C}$  die folgende Sequenz exakt ist:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) \xrightarrow{c^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(b, d) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, d).$$

Wiederum ist es nicht immer der Fall, dass jeder Morphismus einen Kern, Kokern, usw. hat.

**Definition.** Eine additive Kategorie heißt *abelsche Kategorie*, falls jeder Morphismus einen Kern und einen Kokern hat, und folgende Kompatibilitätsbedingung gegeben ist:

Wann immer ein Morphismus  $i: a \rightarrow b$  ein *Monomorphismus* ist, d. h.  $i \circ f = 0 \Rightarrow f = 0$  für alle passenden Morphismen  $f$ , so ist  $i = \ker(\text{coker}(f))$ .

Dual, wann immer ein Morphismus  $p: a \rightarrow b$  ein *Epimorphismus* ist, d. h.  $f \circ p = 0 \Rightarrow f = 0$  für alle passenden Morphismen  $f$ , so ist  $p = \text{coker}(\ker(f))$ .

**Definition.** Lässt sich (in einer beliebigen Kategorie)  $f: a \rightarrow b$  zerlegen als  $f = i \circ p$ , wobei  $p: a \rightarrow x$  ein Epimorphismus und  $i: x \rightarrow b$  ein Monomorphismus ist, so nennt man  $x$  ein *Bild* von  $f$  und schreibt  $x = \text{im}(f)$ . Lässt sich umgekehrt  $f = p \circ i$  schreiben, wobei  $i: a \rightarrow x$  mono und  $p: x \rightarrow b$  epi sind, so nennt man  $x$  ein *Kobild* von  $f$  und schreibt  $x = \text{coim}(f)$ .

**Bemerkung 2.2.1.** Kerne, Kokerne, Bilder und Kobilder sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, wenn sie existieren. In abelschen Kategorien existieren Bilder und Kobilder stets: das Bild ist der Kern des Kokerns, und das Kobild ist der Kokern des Kerns.

Damit können wir auch von *exakten Sequenzen* in allgemeinen abelschen Kategorien reden.

## 2 Kategorien und Funktoren

**Beispiel 2.2.2.** In der additiven Kategorie  $\mathcal{C}$  der endlich erzeugten freien abelschen Gruppen gibt es alle Kerne und Kokerne. Da Untergruppen von endlich erzeugten freien abelschen Gruppen wieder endlich erzeugt und frei sind, folgt leicht, dass die Kerne in  $\mathcal{C}$  den Kernen in  $\text{Ab}$  entsprechen. Der Kokern einer Abbildung  $f: M' \rightarrow M$  in  $\mathcal{C}$  ist gegeben durch  $\text{coker}_{\text{Ab}}(f)/\text{Torsion}$ , d. h. die Quotientengruppe nach der Untergruppe aller Torsionselemente. So hat zum Beispiel die Multiplikation  $0 \neq n: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  trivialen Kern und Kokern. Daher ist das Bild dieser Abbildung in  $\mathcal{C}$  die Identitätsabbildung  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ , also ist  $\mathcal{C}$  keine abelsche Kategorie.

**Beispiel 2.2.3.** Für jeden Ring  $R$  ist die Kategorie der  $R$ -Moduln abelsch, denn Kerne und Kokerne sind auf der Ebene der zu Grunde liegenden abelschen Gruppen definiert.

**Beispiel 2.2.4.** Ist  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie, so ist auch  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  abelsch, denn Kerne in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  sind Kokerne in  $\mathcal{C}$  und umgekehrt. Allgemein ist die Kategoriensprache so gehalten, dass ein  $X$  in  $\mathcal{C}$  einem  $\text{Ko-}X$  in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  entspricht.

**Definition.** Ein Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwischen abelschen Kategorien heißt *additiv*, falls  $F: \text{Hom}(c, c') \rightarrow \text{Hom}(F(c), F(c'))$  ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist. Ist  $0 \rightarrow a' \rightarrow a \rightarrow a'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz in  $\mathcal{C}$ , so heißt  $F$

$$\begin{cases} \text{halbexakt,} & \text{falls } F(a') \rightarrow F(a) \rightarrow F(a'') \text{ exakt ist;} \\ \text{linksexakt,} & \text{falls } 0 = F(0) \rightarrow F(a') \rightarrow F(a) \rightarrow F(a'') \text{ exakt ist;} \\ \text{rechtsexakt,} & \text{falls } F(a') \rightarrow F(a) \rightarrow F(a'') \rightarrow 0 \text{ exakt ist; und} \\ \text{exakt,} & \text{falls } 0 \rightarrow F(a') \rightarrow F(a) \rightarrow F(a'') \rightarrow 0 \text{ exakt ist.} \end{cases}$$

- Beispiel 2.2.5.**
1. Die Funktoren  $\coprod$  und  $\prod: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , so sie existieren, sind exakt;
  2. der Funktor  $M \otimes_R -$  auf  $\text{Mod}_R$  ist rechtsexakt, und exakt genau dann, wenn  $M$  flach ist;
  3. der Funktor  $\text{Hom}_R(M, -)$  auf  $\text{Mod}_R$  ist linksexakt, und genau dann exakt, wenn  $M$  projektiv ist;
  4. der Funktor  $\text{Hom}_R(-, M)$  auf  $(\text{Mod}_R)^{\text{op}}$  ist linksexakt, und genau dann exakt, wenn  $M$  injektiv ist.

**Bemerkung 2.2.6.** Die Funktoren  $\coprod$  und  $\prod: \mathcal{C}^I \rightarrow \mathcal{C}$  sind nicht notwendig exakt, wenn  $I$  eine unendliche Indexmenge ist. Dies ist aber der Fall in der Kategorie der  $R$ -Moduln.

Die letzten beiden Beispiele liefern eine Definition von projektiv und von injektiv in allgemeinen abelschen Kategorien. Auch wenn nicht alle abelschen Kategorien ein Tensorprodukt haben, so liefert der zweite Punkt doch eine Definition von Flachheit, falls ein solches Tensorprodukt existiert, das die universelle Eigenschaft aus Proposition 1.2.13 besitzt.

Damit haben wir genug abstrakte Sprache, um uns wieder der homologischen Algebra widmen zu können. An dieser Stelle lässt sich homologische Algebra definieren als *das Studium halbexakter Funktoren*. Die nächsten Kapitel werden sich vor allem mit den Funktoren  $\otimes_R$  und  $\text{Hom}_R$  befassen.

### Übungen

**2.2.7** (Koalgebren und Komoduln). Eine *Koalgebra*  $C$  über einem kommutativen Ring  $k$  ist ein  $k$ -Modul mit einer *Komultiplikation*  $\Delta: C \rightarrow C \otimes_k C$  und einer *Koeins*  $\epsilon: C \rightarrow k$ , so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes_k C \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow \text{id}_C \otimes_k \Delta \\
 C \otimes_k C & \xrightarrow{\Delta \otimes_k \text{id}_C} & C \otimes_k C \otimes_k C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 C \otimes_k C & \xleftarrow{\Delta} & C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes_k C \\
 \searrow \text{id}_C \otimes_k \epsilon & & \parallel & & \swarrow \epsilon \otimes_k \text{id}_C \\
 & & C & & 
 \end{array}$$

und ein *Komodul*  $M$  über einer Koalgebra  $C$  ist ein  $k$ -Modul mit einer Komultiplikation  $\Delta: M \rightarrow C \otimes_k M$ , so dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes_k M \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow \text{id}_C \otimes_k \Delta \\
 C \otimes_k M & \xrightarrow{\Delta \otimes_k \text{id}_M} & C \otimes_k C \otimes_k M
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes_k M \\
 \parallel & \swarrow \epsilon \otimes_k \text{id}_M & \\
 M & & 
 \end{array}$$

Zeige, dass die Komoduln über einer Koalgebra eine Kategorie  $\text{Comod}_C$  bilden, die genau dann abelsch ist mit der Eigenschaft, dass der Vergissfunktorkom  $\text{Comod}_C \rightarrow \text{Ab}$  exakt ist, wenn  $C$  als  $k$ -Modul flach ist.

**2.2.8** (Diagrammkategorien). Sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie,  $\mathcal{I}$  eine beliebige kleine Kategorie (d. h. die Objekte formen eine Menge) und  $\mathcal{D} = \text{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$  die Kategorie der Funktoren und natürlichen Transformationen von  $\mathcal{I}$  nach  $\mathcal{C}$ . Zeige, dass  $\mathcal{D}$  wieder abelsch ist.

Sei nun  $\mathcal{I} = [1]$  die Kategorie mit zwei Objekten 0 und 1 und drei Morphismen, nämlich den Identitätsmorphismen und einem Morphismus  $0 \rightarrow 1$ . Bestimme explizite Kriterien, wann ein Objekt  $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  projektiv und wann es injektiv ist.

# 3 Auflösungen und abgeleitete Funktoren

In diesem Kapitel werden wir die Sprache der abelschen Kategorien verwenden; der Leser sollte dabei aber immer das Beispiel der  $R$ -Moduln für einen Ring  $R$  im Hinterkopf haben.

## 3.1 Projektive und injektive Auflösungen

**Definition.** Eine abelsche Kategorie  $\mathcal{C}$  hat *genug projektive Objekte*, falls es für jedes Objekt  $M \in \mathcal{C}$  einen Epimorphismus  $P \rightarrow M \rightarrow 0$  aus einem projektiven Objekt  $P$  gibt. Sie hat umgekehrt *genug injektive Objekte*, falls es für jedes Objekt  $M$  einen Monomorphismus  $0 \rightarrow M \rightarrow I$  in ein injektives Objekt  $I$  gibt.

**Bemerkung 3.1.1.** *Projektive in  $\mathcal{C}$  sind Injektive in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  und umgekehrt.*

**Beispiel 3.1.2.** Die Kategorie der endlichen abelschen Gruppen ist abelsch, hat aber überhaupt keine projektiven Objekte, insbesondere nicht genug. Sie hat auch keine injektiven Objekte, denn Multiplikation mit der Gruppenordnung ist 0, also können endliche abelsche Gruppen nicht teilbar sein.

**Beispiel 3.1.3.** Die Kategorie der abelschen Torsionsgruppen (das sind diejenigen abelschen Gruppen  $A$ , wo es für jedes  $a \in A$  ein  $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$  gibt, so dass  $na = 0$ ) hat wiederum keine Projektiven, aber genug Injektive: Die Gruppe  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  ist eine injektive Torsionsgruppe, und jede abelsche Torsionsgruppe kann in ein genügend großes Produkt von  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 's eingebettet werden.

**Beispiel 3.1.4.** Die Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen hat zwar genug Projektive (die freie abelsche Gruppe auf einem endlichen Erzeugersystem bildet surjektiv auf eine solche Gruppe ab), aber nicht genug Injektive:  $\mathbf{Z}$  kann nicht in eine injektive endlich erzeugte Gruppe eingebettet werden.

**Satz 3.1.5.** *Die Kategorie  $\text{Mod}_R$  hat genug projektive und injektive Objekte.*

*Beweis.* Die Aussage über Projektive ist leicht, denn tatsächlich kann man immer eine Surjektion von einem freien Modul konstruieren. Es bleibt zu zeigen, dass jeder  $R$ -Modul  $M$  in einen injektiven  $R$ -Modul  $Q$  eingebettet werden kann.

Dazu setzen wir  $I(M) = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \in \text{Mod}_{R^{\text{op}}}$ . Ist  $M$  frei, so ist

$$I(M) = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}\left(\bigoplus_i R, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\right) = \prod_i \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

### 3.1 Projektive und injektive Auflösungen

Wir zeigen zunächst, dass  $I(M)$  in diesem Fall injektiv ist. Da Produkte von Injektiven wieder injektiv sind, genügt es zu zeigen, dass  $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  injektiv über  $R^{\text{op}}$  ist. Aber

$$\text{Hom}_{R^{\text{op}}}( -, \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \underset{\text{Prop. 1.2.13}}{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(- \otimes_R R, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

und da letzterer Funktor exakt ist ( $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  ist teilbar, also injektiv), ist es auch ersterer.

Definiere den injektiven Modul  $Q$  durch

$$Q = \prod_{f \in I(M)} I(R).$$

Die Abbildung  $M \rightarrow Q, m \mapsto \{r \mapsto f(rm)\}_{f \in I(M)}$  ist injektiv: Sei  $0 \neq m \in M$  und wähle  $f \in I(M)$  mit  $f(m) \neq 0$ . Dies ist möglich wegen der Injektivität von  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ :

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \mathbf{Z}\{m\} / \ker & \longrightarrow & M \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & & \end{array}$$

In dem Faktor  $f$  ist damit das Bild von  $m$  die Abbildung  $r \mapsto f(rm)$ , die von null verschieden ist.  $\square$

**Definition.** Sei  $M$  ein Objekt in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ . Eine *projektive Auflösung* von  $M$  ist eine exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow P_i \rightarrow P_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

in der alle Objekte (außer natürlich  $M$ ) projektiv sind. Eine *injektive Auflösung* ist umgekehrt eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_{-1} \rightarrow \cdots,$$

in der alle  $Q_i$  injektiv sind.

**Lemma 3.1.6.** *Hat  $\mathcal{C}$  genug Projektive, so hat jedes Objekt eine projektive Auflösung. Hat umgekehrt  $\mathcal{C}$  genug Injektive, so hat jedes Objekt eine injektive Auflösung.*

*Beweis.* Wir beweisen nur den projektiven Teil, denn der injektive ist die entsprechende Aussage in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ . Zunächst existiert eine Surjektion  $P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , da  $\mathcal{C}$  genug Projektive hat. Sei  $K_0 = \ker(P_0 \rightarrow M)$ . Dieser Modul ist im Allgemeinen nicht projektiv, aber wir können eine surjektive Abbildung  $P_1 \rightarrow K_0$  von einem projektiven Modul finden. Damit ist die resultierende Sequenz  $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  exakt. Iteriert man dieses Verfahren, erhält man offensichtlich eine projektive Auflösung.  $\square$

### 3.2 Homologie und Homotopie

Wir bezeichnen mit  $\text{Ch}_{\mathcal{C}}$  die Kategorie der Kettenkomplexe in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ . Die Morphismen sind hierbei die „Leitern“ von Morphismen in  $\mathcal{C}$ , das heißt kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & C_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & \dots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \\ \dots & \xrightarrow{d_{n+1}} & D_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & D_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & \dots \end{array}$$

Hierbei und im Folgenden bezeichne ich generisch alle Morphismen in Kettenkomplexen mit  $d$ . Dies führt nicht zu Verwirrungen, wenn man immer im Auge behält, was die Quelle und das Ziel sein muss.

**Definition.** Sei  $(C_{\bullet}, d_{\bullet}) \in \text{Ch}_{\mathcal{C}}$ . Die  $i$ -Zykel sind definiert als  $Z_i(C_{\bullet}, d_{\bullet}) = \ker(d_{i-1})$ ; analog sind die  $i$ -Ränder  $B_i(C_{\bullet}, d_{\bullet})$  das Bild von  $d_i$ . Wegen der Kettenkomplexbedingung sind die Ränder ein Unterobjekt der Zykel, d. h. der Monomorphismus  $B_i \rightarrow C_i$  faktorisiert durch einen Monomorphismus  $B_i \rightarrow Z_i$ . Die *Homologie* von  $C_{\bullet}$  ist definiert als der Quotient

$$H_i(C_{\bullet}, d_{\bullet}) = Z_i / B_i = \ker(d_{i-1}) / \text{im}(d_i).$$

Die Zuordnung  $H_n: \text{Ch}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$  ist ein Funktor, denn jede Abbildung von Kettenkomplexen bildet Kerne auf Kerne und Bilder auf Bilder ab. Für einen Kettenmorphismus  $f$  wird üblicherweise  $f_*$  statt  $H_*(f)$  geschrieben.

**Bemerkung 3.2.1.** Die Bezeichnungen *Zykel* und *Rand* stammen aus der Topologie. Dort lässt sich  $d_{\bullet}$  oft interpretieren als der geometrische Rand eines Objektes, z. B. einer Mannigfaltigkeit, und ein Zykel ist ein Objekt ohne Rand.

Es ist oft üblich, die Graduierung der Kettenkomplexe umzudrehen (d. h. die Abbildungen gehen nun von  $C_i$  nach  $C_{i+1}$ ), und die resultierende Homologie dann Kohomologie zu nennen. Der Einfachheit halber drehen wir nichts um und definieren die *Kohomologie* schlicht als  $H^i(C_{\bullet}, d_{\bullet}) = H_{-i}(C_{\bullet}, d_{\bullet})$  und definieren auch  $C^i = C_{-i}$ .

Man beachte, dass ein Komplex genau dann exakt ist, wenn seine Homologie verschwindet. Die Homologie misst die Abweichung von der Exaktheit.

**Beispiel 3.2.2.** Oft kann es passieren, dass eine Abbildung zwischen zwei Kettenkomplexen zwar kein Isomorphismus ist, aber einen solchen in der Homologie induziert. Hier ist ein Beispiel für  $\mathcal{C} = \text{Ab}$ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 \end{array}$$

In beiden Fällen ist  $H_0 = \mathbf{Z}/2$ , und alle anderen Homologiegruppen verschwinden.

### 3.3 Das Fundamentallemma der homologischen Algebra

Viele Homologieisomorphismen haben die Form einer *Kettenhomotopieäquivalenz*.

**Definition.** Seien  $f, g: C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  zwei Kettenabbildungen. Eine Folge von Abbildungen  $h_n: C_{n-1} \rightarrow D_n$  mit der Eigenschaft

$$f - g = h \circ d + d \circ h$$

heißt *(Ketten-)homotopie*. Existiert eine Kettenhomotopie zwischen  $f$  und  $g$ , so nennen wir die beiden Abbildungen *(ketten-)homotop* und schreiben  $f \simeq g$ .

Sind  $f: C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  und  $g: D_\bullet \rightarrow C_\bullet$  Kettenabbildungen mit der Eigenschaft  $f \circ g \simeq \text{id}_{D_\bullet}$  und  $g \circ f \simeq \text{id}_{C_\bullet}$ , so nennen wir  $C_\bullet$  und  $D_\bullet$  *(ketten-)homotopieäquivalent* und schreiben  $C_\bullet \simeq D_\bullet$ .

**Bemerkung 3.2.3.** Eine Kettenhomotopie ist im Allgemeinen keine Kettenabbildung – genauer gesagt nur dann, wenn  $f = g$  gilt!

**Satz 3.2.4.** Kettenhomotope Abbildungen induzieren die gleiche Abbildung in Homologie. Kettenhomotopieäquivalenzen induzieren Isomorphismen in Homologie.

*Beweis.* Offensichtlich folgt die zweite Aussage sofort aus der ersten und den Definitionen. Sei also eine Kettenhomotopie  $h$  gegeben. Wir müssen zeigen, dass  $\hat{h} = (h \circ d + d \circ h)$  die Nullabbildung in Homologie induziert. Schränken wir  $\hat{h}_n$  auf die Zyklen ein, so gilt offensichtlich:  $\hat{h}|_{\ker d} = d \circ h$ . Damit gilt aber auch, dass  $\hat{h}|_{\ker d} \subseteq \text{im } d$ , und somit  $\hat{h}_* = 0$  in Homologie.  $\square$

Das Beispiel 3.2.2 für einen Homologieisomorphismus ist allerdings nicht von dieser Form: alle Kettenabbildungen von dem unteren Komplex in den oberen sind null, also kann es keine Kettenhomotopieäquivalenz geben.

## Übungen

**3.2.5.** Sei  $K$  ein Körper und  $C, D$  zwei Kettenkomplexe über  $\text{Mod}_K$ . Zeigen Sie, dass  $C$  und  $D$  genau dann kettenhomotopieäquivalent sind, wenn sie homologieäquivalent sind.

## 3.3 Das Fundamentallemma der homologischen Algebra

Das folgende Lemma ist der Dreh- und Angelpunkt der gesamten homologischen Algebra.

**Satz 3.3.1.** Sei  $f: M \rightarrow N$  ein Morphismus in einer abelschen Kategorie,  $P_\bullet \rightarrow M$  ein Kettenkomplex aus projektiven Objekten und  $N_\bullet \rightarrow N \rightarrow 0$  eine beliebige exakte Sequenz.

1. Dann gibt es eine Fortsetzung  $f_\bullet: P_\bullet \rightarrow N_\bullet$ , so dass das entstehende Leiterdiagramm kommutiert; und
2. je zwei solche Fortsetzungen  $f_\bullet, f'_\bullet$  sind kettenhomotop.

Analoges gilt natürlich wiederum für injektive Auflösungen.

### 3 Auflösungen und abgeleitete Funktoren

**Korollar 3.3.2.** *Je zwei projektive (injektive) Auflösungen eines Objekts sind kettenhomotopieäquivalent.*

*Beweis des Satzes.* Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \longrightarrow & M \\ & & \downarrow f \\ N_0 & \longrightarrow & N \longrightarrow 0. \end{array}$$

Da  $M$  projektiv ist, gibt es eine Fortsetzung  $M \rightarrow N_0$  und insbesondere einen Morphismus  $f_0: P_0 \rightarrow N_0$ , so dass das entstehende Diagramm kommutiert. Bezeichnet  $M'$  den Kern der oberen Abbildung und  $N'$  den Kern der unteren, so erhält man insbesondere eine Abbildung  $f': M' \rightarrow N'$  und ein neues Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \longrightarrow & M' \\ & & \downarrow f' \\ N_1 & \longrightarrow & N' \longrightarrow 0, \end{array}$$

in dem die untere Zeile wiederum exakt ist. Indem man in der gleichen Weise fortfährt, erhält man eine Fortsetzung über die gesamte Auflösung.

Für den zweiten Teil genügt es zu zeigen, dass jede Hochhebung  $f$  der Nullabbildung kettenhomotop zur Nullabbildung ist, d. h. es gibt eine Kettenhomotopie  $h$ , so dass  $f = h \circ d + d \circ h$  gilt. Betrachte

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_0 & \longrightarrow & M & & \\ & & \downarrow f_0 & & \downarrow 0 & & \\ N_1 & \xrightarrow{d} & N_0 & \xrightarrow{d} & N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Da  $d \circ f = 0$  und  $P_0$  projektiv ist, erhält man eine Hochhebung  $h_0: P_0 \rightarrow N_1$  über  $N_1 \rightarrow \ker(N_0 \rightarrow N) \rightarrow 0$ , so dass  $d \circ h_0 = f$ . Ähnlich wie vorher lässt sich das Argument jetzt für  $f_1 - h_0 \circ d$  wiederholen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_1 & \longrightarrow & P_0 & & \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \\ & & \swarrow h_0 & & \downarrow f_0 & & \\ N_2 & \xrightarrow{d} & N_1 & \xrightarrow{d} & \ker d & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Beachte, dass in dem Quadrat nur das untere Dreieck kommutiert! Es gilt nun also, dass  $d \circ (f_1 - h_0 \circ d) = 0$  gilt, damit lässt sich  $f_1 - h_0 \circ d$  nach  $N_2$  hochheben zu einer Abbildung  $h_1$ , so dass  $d \circ h_1 + h_0 \circ d = f$  gilt. Iteriert man die Konstruktion, ist der Beweis vollständig.  $\square$

**Definition.** Sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie mit genug Projektiven, und sei  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein rechtsexakter additiver Funktor in eine zweite abelsche Kategorie. Die (*links-*)*abgeleiteten Funktoren*  $L_n F$  von  $F$  sind gegeben durch:

$$L_n F(X) = H_n(F(P_\bullet)),$$

wobei  $P_\bullet \rightarrow X$  eine beliebige projektive Auflösung von  $X$  ist und  $F(P_\bullet)$  die termweise Anwendung des Funktors  $F$  auf  $P_\bullet$  bezeichnet.

Hat  $\mathcal{C}$  genug Injektive und ist  $F$  linksexakt, so sind die (*rechts-*)*abgeleiteten Funktoren*  $R^n F$  analog definiert:

$$R^n F(X) = H^n(F(I_\bullet)),$$

wobei  $X \rightarrow I_\bullet$  eine injektive Auflösung ist.

Beachte, dass  $F(P_\bullet)$  wiederum ein Kettenkomplex ist, weil  $F$  additiv ist; allerdings ist er im Allgemeinen nur dann exakt, wenn  $F$  exakt ist.

Wegen des Fundamentallemmas sind die abgeleiteten Funktoren bis auf Isomorphie wohldefiniert: denn wenn  $P_\bullet, P'_\bullet$  zwei verschiedene projektive Auflösungen sind, so erhält man eine Kettenhomotopieäquivalenz  $P_\bullet \simeq P'_\bullet$  und damit auch  $F(P_\bullet) \simeq F(P'_\bullet)$ . Aus Satz 3.2.4 folgt dann, dass die Homologiegruppen isomorph sind.

Das Fundamentallemma zeigt auch, dass die abgeleiteten Funktoren wirklich Funktoren sind, also auch auf Morphismen definiert sind. Denn ist  $f: X \rightarrow Y$  ein Morphismus, so kann man  $f$  auf bis auf Homotopie eindeutige Weise auf die projektiven Auflösungen  $P_\bullet, Q_\bullet$  hochheben; damit erhält man einen Morphismus  $F(P_\bullet) \rightarrow F(Q_\bullet)$ , der wiederum einen Morphismus auf der Homologie induziert. Dass die Funktoraxiome erfüllt sind, überprüft man leicht.

**Lemma 3.3.3.**  $L_0 F = F$  und  $R^0 F = F$ .

*Beweis.* Wie zeigen den ersten Teil. Ist  $P_\bullet \rightarrow X$  eine projektive Auflösung, so ist

$$F(P_1) \rightarrow F(P_0) \rightarrow F(X) \rightarrow 0$$

exakt, denn  $F$  ist rechtsexakt. Also ist  $F(X) \cong F(P_0) / \text{im}(F(P_1)) = H_0(F(P_\bullet))$ .  $\square$

### 3.4 Die lange exakte Sequenz

Wie bereits erwähnt, sollen abgeleitete Funktoren die Abweichung eines Funktors von der Exaktheit messen. Wir haben schon gesehen, dass die abgeleiteten Funktoren genau dann verschwinden, wenn der Funktor exakt ist – aber sogar in dem Fall, wo sie nicht verschwinden, lassen sich interessante strukturelle Aussagen mit Hilfe der abgeleiteten Funktoren machen. Von zentraler Bedeutung ist hierbei die *lange exakte Sequenz von abgeleiteten Funktoren*.

### 3 Auflösungen und abgeleitete Funktoren

**Satz 3.4.1.** Sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven,  $\mathcal{D}$  eine beliebige abelsche Kategorie, und  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein linksexakter additiver Funktor. Sei  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz in  $\mathcal{C}$ . Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow R^0F(M') \rightarrow \cdots \rightarrow R^iF(M') \xrightarrow{i_*} R^iF(M) \xrightarrow{p_*} R^iF(M'') \xrightarrow{\partial} R^{i+1}F(M') \rightarrow \cdots$$

Hat  $\mathcal{C}$  analog genug Projektive, und  $F$  ist rechtsexakt, dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow L_iF(M') \xrightarrow{i_*} L_iF(M) \xrightarrow{p_*} L_iF(M'') \xrightarrow{\partial} L_{i-1}F(M') \xrightarrow{i_*} \cdots \rightarrow L_0F(M'') \rightarrow 0$$

Der Homomorphismus  $\partial$  heißt *Verbindungshomomorphismus* und wird im Beweis konstruiert.

Zunächst brauchen wir ein klassisches Lemma aus der homologischen Algebra.

**Lemma 3.4.2** (Schlangenlemma). Das folgende Diagramm in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  sei kommutativ mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' \end{array}$$

Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$\ker f' \rightarrow \ker f \rightarrow \ker f'' \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} f' \rightarrow \operatorname{coker} f \rightarrow \operatorname{coker} f''.$$

Hierbei ist  $\partial$  ein Morphismus, der im Beweis konstruiert wird.

Ist  $M' \rightarrow M$  mono, so ist es auch  $\ker f' \rightarrow \ker f$ , und ist  $N \rightarrow N''$  epi, so ist es auch  $\operatorname{coker} f \rightarrow \operatorname{coker} f''$ .

*Beweis.* Der Beweis dieses Lemmas ist ein Beispiel für eine *Diagrammjagd* und lässt sich nur schwer auf Papier festhalten. Stattdessen empfehle ich eine Vorlesung oder den Anfang des Films *It's My Turn* (deutscher Verleihtitel: „Ich nenn' es Liebe“) von Claudia Weill, in dem die Schlangenabbildung konstruiert wird.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass  $\mathcal{C}$  eine abelsche Unterkategorie der Kategorie der Moduln über einem Ring  $R$  ist, und wir somit mit Elementen in Objekten von  $\mathcal{C}$  arbeiten können. Dies ist in der Tat keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn jede abelsche Kategorie ist von dieser Form, was aber hier nicht bewiesen werden soll [Mit64, Mit65, Fre64]. Alternativ kann der Beweis modifiziert werden, so dass er allgemein gilt, vgl. dazu [ML98, S. 202ff].

Zunächst zur Konstruktion von  $\partial$ . Sei  $m'' \in \ker f''$ . Da  $M \rightarrow M''$  surjektiv ist, gibt es ein Urbild  $m_0 \in M$ , und jedes solche Urbild hat die Form  $m = m_0 + m'$  für  $m' \in M'$  wegen der Exaktheit bei  $M$ . Da  $f(m_0)$  unter  $N \rightarrow N''$  nach 0 abgebildet wird (denn  $m'' \in \ker f''$ ), gibt es ein eindeutiges  $n'_0 \in N'$  mit  $n'_0 \mapsto f(m_0)$  (hier wird die Exaktheit der unteren Zeile an beiden Stellen verwendet). Ebenso gilt  $n'_0 + f'(m') \mapsto f(m) \in N$ ; somit ist  $n'_0 =: \partial(m'')$  wohldefiniert in  $\operatorname{coker} f'$ . Nach Konstruktion ist  $\partial$  ein Modulmorphismus.

Zum Beweis der Exaktheit können wir uns auf zwei Stellen beschränken, z. B. Exaktheit bei  $\ker f$  und Exaktheit bei  $\ker f''$ . Die Zusatzaussage über die Injektivität von  $\ker f' \rightarrow \ker f$  ist offensichtlich, und die Exaktheit bei  $\operatorname{coker} f'$  und  $\operatorname{coker} f$  und die Zusatzaussage über die Surjektivität folgt dann durch Übergang zu der dualen Kategorie  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

*Exaktheit bei  $\ker f$ .* Sei  $m \in \ker f$  mit  $m \mapsto 0 \in M''$ . Wegen der Exaktheit der oberen Zeile gibt es ein Urbild  $m' \in M'$ , von dem gezeigt werden muss, dass es in  $\ker f'$  liegt. Aber  $f'(m') \mapsto 0 \in N$ , denn  $f(m) = 0$ , und da  $N' \rightarrow N$  injektiv ist, muss schon  $f'(m') = 0$  sein.

*Exaktheit bei  $\ker f''$ .* Wir verwenden die Bezeichnungen von Elementen aus dem ersten Teil des Beweises, wo die Schlangenabbildung konstruiert wird. Zunächst zeigen wir, dass die Komposition  $\ker f \rightarrow \ker f'' \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} f'$  null ist. Wenn also  $m'' \in \operatorname{im}(\ker f \rightarrow \ker f'')$  ist, so können wir  $m_0 \in \ker f$  wählen und damit auch  $n'_0 = 0$ , also ist  $\partial(m'') = 0$ .

Sei nun  $m'' \in \ker \partial$ ; gesucht ist ein Urbild in  $\ker f$ . Es gilt also  $n'_0 \in \operatorname{im}(f')$ , sagen wir  $f'(m'_0) = n'_0$ . Es gilt zwar nicht unbedingt, dass das Bild von  $n'_0$  in  $M$  gleich  $m_0$  ist, aber die Differenz  $d$  wird unter  $f$  nach  $0 \in N$  abgebildet. Also ist  $d \in \ker f$ , und  $d \mapsto m'' \in M''$ .  $\square$

**Bemerkung 3.4.3** (Natürlichkeit). *Aus der Konstruktion folgt, dass der Schlangenmorphismus  $\partial$  natürlich ist, d. h., wenn wir einen Morphismus von Diagrammen  $D_1 \rightarrow D_2$  der obigen Form haben, so kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \ker(f_{D_1}: M''_{D_1} \rightarrow N''_{D_1}) & \xrightarrow{\partial} & \operatorname{coker}(f_{D_1}: M'_{D_1} \rightarrow N'_{D_1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ker(f_{D_2}: M''_{D_2} \rightarrow N''_{D_2}) & \xrightarrow{\partial} & \operatorname{coker}(f_{D_2}: M'_{D_2} \rightarrow N'_{D_2}). \end{array}$$

*Beweis des Satzes.* Es genügt, folgende Aussage zu zeigen:

**3.4.4.** *Ist  $0 \rightarrow M'_\bullet \rightarrow M_\bullet \rightarrow M''_\bullet \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen in  $\mathcal{C}$  (d. h., für jedes  $n$  ist  $0 \rightarrow M'_n \rightarrow M_n \rightarrow M''_n \rightarrow 0$  exakt), so gibt es eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \rightarrow H_i(M'_\bullet) \rightarrow H_i(M_\bullet) \rightarrow H_i(M''_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(M'_\bullet) \rightarrow \dots$$

Wir nehmen wieder an, dass  $\mathcal{C}$  eine Unterkategorie der Kategorie der  $R$ -Moduln für einen Ring  $R$  ist.

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_n & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & M''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ 0 & \longrightarrow & M'_{n-1} & \longrightarrow & M_{n-1} & \longrightarrow & M''_{n-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

zusammen mit dem Schlangenlemma liefert eine lange exakte Sequenz

$$0 \rightarrow Z_n M' \rightarrow Z_n M \rightarrow Z_n M'' \rightarrow \frac{M'_{n-1}}{B_{n-1} M'} \rightarrow \frac{M_{n-1}}{B_{n-1} M} \rightarrow \frac{M''_{n-1}}{B_{n-1} M''} \rightarrow 0.$$

### 3 Auflösungen und abgeleitete Funktoren

Inbesondere sind die Zeilen exakt in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 M'_n / B_n M' & \longrightarrow & M_n / B_n M & \longrightarrow & M''_n / B_n M'' & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
 0 & \longrightarrow & Z_{n-1} M' & \longrightarrow & Z_{n-1} M & \longrightarrow & Z_{n-1} M''
 \end{array}$$

und erneute Anwendung des Schlangenlemmas liefert die lange exakte Sequenz in Homologie, da  $\ker d = H_n$  und  $\operatorname{coker} d = H_{n-1}$  in diesem Diagramm ist.  $\square$

**Bemerkung 3.4.5.** Aus der Natürlichkeit der Schlangenabbildung kann man auch hier eine Natürlichkeitsaussage ableiten: wenn

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit kurzen exakten Zeilen ist, so kommutiert auch die Leiter

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_i(M') & \longrightarrow & H_i(M) & \longrightarrow & H_i(M'') & \longrightarrow & H_{i-1}(M') & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_i(N') & \longrightarrow & H_i(N) & \longrightarrow & H_i(N'') & \longrightarrow & H_{i-1}(N') & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

**Bemerkung 3.4.6.** Die Aussage des Schlangenlemmas kann man durch abgeleitete Funktoren auch kompakt so ausdrücken:  $R^1 \ker = \operatorname{coker}$  und  $R^n \ker = 0$  für  $n \geq 2$ . Hierbei muss man  $\ker$  und  $\operatorname{coker}$  als Funktoren von der Kategorie  $\operatorname{Ar}(\mathcal{C})$  nach  $\mathcal{C}$  auffassen, wobei die Objekte von  $\operatorname{Ar}(\mathcal{C})$  die Morphismen von  $\mathcal{C}$  sind und die Morphismen von  $\operatorname{Ar}(\mathcal{C})$  die kommutativen Quadrate.

## Übungen

**3.4.7 (Fünferlemma).** In einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  sei folgendes kommutatives Diagramm gegeben:

$$\begin{array}{cccccc}
 M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5
 \end{array}$$

Zeige, dass dann auch der mittlere Morphismus ein Isomorphismus ist. Welche Bedingungen braucht man genau an die anderen senkrechten Pfeile, um zu schließen, dass der mittlere Morphismus ein Monomorphismus (Epimorphismus) ist?

**3.4.8 (Der Bockstein).** Sei  $R$  ein Ring und  $r \in R$ . Ist  $M$  ein  $R$ -Modul, so gibt es eine kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow M \xrightarrow{r} M \xrightarrow{p} M/r \rightarrow 0$ . Ist  $N$  ein  $R^{\text{op}}$ -Modul, so erhalten wir also eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow \text{Tor}_n^R(N, M) \xrightarrow{p_*} \text{Tor}_n^R(N, M/r) \xrightarrow{\partial} \text{Tor}_{n-1}^R(N, M) \xrightarrow{r_*} \text{Tor}_{n-1}^R(N, M) \rightarrow \cdots$$

Der *Bockstein-Homomorphismus* ist definiert als

$$\beta: \text{Tor}_n^R(N, M/r) \rightarrow \text{Tor}_{n-1}^R(N, M/r); \quad \beta = p_* \circ \partial$$

und ist eine natürliche Transformation von  $\text{Tor}_n^R(-, M/r)$  nach  $\text{Tor}_{n-1}^R(-, M/r)$ . Sei  $p$  eine Primzahl und  $R = \mathbf{Z}[t]/(t^p - 1)$ . Bestimme die Torsionsgruppen  $\text{Tor}_R(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p)$  sowie den Bockstein für  $r = p \in R$ .

**3.4.9 (Dimensionsverschiebung).** Sei  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein rechtsexakter Funktor von abelschen Kategorien. Gegeben sei eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow K \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

in  $\mathcal{C}$ , wobei alle  $P_i$  projektiv sind. Zeige, dass dann gilt:

$$L_i F(M) \cong L_{i-n} F(K) \quad \text{für alle } i > n.$$

Insbesondere gilt  $L_i F = 0$  für alle  $i$ , falls  $L_1 F = 0$ .

### 3.5 Tor und Ext

Die vielleicht wichtigsten abgeleiteten Funktoren sind die von Tensorprodukt und Homomorphismengruppen.

**Definition.** Sei  $R$  ein Ring. Definiere zu  $X \in \text{Mod}_{R^{\text{op}}}$  einen Funktor  $F_X: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Ab}$  durch  $F_X(Y) = X \otimes_R Y$ . Dieser Funktor ist rechtsexakt (vgl. Bsp. 2.2.5), und seine linksabgeleiteten Funktoren bezeichnen wir mit

$$\text{Tor}_n^R(X, Y) = L_n F_X(Y).$$

Sei nun  $X \in \text{Mod}_R$  und definiere  $G_X: (\text{Mod}_R)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$  durch  $G_X(Y) = \text{Hom}_R(Y, X)$ .  $G_X$  ist linksexakt (vgl. Bsp. 2.2.5), und seine rechtsabgeleiteten Funktoren bezeichnen wir mit

$$\text{Ext}_R^n(Y, X) = R^n G_X(Y).$$

In der Definition von Ext wird tatsächlich eine projektive Auflösung in  $\text{Mod}_R$  verwendet, denn das ist das gleiche wie eine injektive Auflösung in  $(\text{Mod}_R)^{\text{op}}$ !

Folgende Beobachtungen folgen sofort aus den Definitionen:

- $\text{Tor}_n^R(X, Y) = 0$  für alle  $Y$  und  $n > 0$  genau dann, wenn  $X$  flach ist;

### 3 Auflösungen und abgeleitete Funktoren

- $\text{Ext}_R^n(Y, X) = 0$  für alle  $Y$  und  $n > 0$  genau dann, wenn  $X$  injektiv ist.
- Tor und Ext sind nicht nur Funktoren in der Variablen  $Y$ , sondern auch in  $X$ .

**Beispiel 3.5.1.** Sei  $R = \mathbf{Z}$  und  $Y = \mathbf{Z}/n$ . Eine freie, daher projektive Auflösung von  $\mathbf{Z}/n$  ist gegeben durch

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n \rightarrow 0.$$

Wir berechnen nun  $\text{Tor}_k^{\mathbf{Z}}(X, Y)$  für  $X = \mathbf{Z}/m$ . Dies ist die Homologie des Komplexes

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}/m \xrightarrow{n} \mathbf{Z}/m \rightarrow 0.$$

Daraus folgt (vgl. Bsp. 1.1.1), dass

$$\text{Tor}_k(X, Y) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}/\text{ggT}(m, n); & \text{falls } k = 0, 1 \\ 0; & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat verschwinden die höheren (d. h.  $k \geq 2$ ) Tor-Gruppen über  $\mathbf{Z}$  immer, weil  $\mathbf{Z}$  ein Hauptidealring ist: man kann stets eine freie Auflösung konstruieren, die in den Graden 0 und 1 konzentriert ist.

**Beispiel 3.5.2.** Eine sehr ähnliche Rechnung zeigt, dass

$$\text{Ext}^k(\mathbf{Z}/m, \mathbf{Z}/n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}/\text{ggT}(m, n); & \text{falls } k = 0, 1 \\ 0; & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Beispiel 3.5.3.** In dem folgenden Beispiel gibt es unendlich viele nichttriviale Tor-Gruppen: Sei  $R = \mathbf{Z}[t]/(t^n - 1)$ . Wähle  $R$ -Moduln  $X = Y = \mathbf{Z}$ , wobei  $t \cdot n = n$ . Eine projektive (wiederum sogar freie) Auflösung ist gegeben durch:

$$\dots \xrightarrow{N} R \xrightarrow{1-t} R \xrightarrow{N} R \xrightarrow{1-t} R \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z},$$

wobei  $\epsilon$  definiert ist durch  $\epsilon(t) = 1$  und  $N = 1 + t + \dots + t^{n-1}$ . Nach Tensorieren der Auflösung über  $R$  mit  $\mathbf{Z}$  ergibt sich der Komplex

$$\dots \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

Somit gilt

$$\text{Tor}_k^R(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{falls } k = 0; \\ \mathbf{Z}/n, & \text{falls } k \text{ ungerade;} \\ 0, & \text{falls } k > 0 \text{ gerade.} \end{cases}$$

Diese Art von Periodizität wird uns noch oft begegnen.

### 3.5.1 Symmetrie von Tor und das Analogon für Ext

Es liegt nahe, eine zweite Variante  $\text{Tor}'$  von Tor zu definieren, indem man die andere Variable projektiv auflöst. In der Tat sind die beiden Konstruktionen isomorph.

**Bemerkung 3.5.4.** *Noch radikaler könnte man das Tensorprodukt als einen Funktor*

$$\otimes_R: \text{Mod}_{R^{\text{op}}} \times \text{Mod}_R \rightarrow \text{Ab}$$

*auffassen und für dessen abgeleitete Funktoren projektive Auflösungen in der abelschen Kategorie  $\text{Mod}_{R^{\text{op}}} \times \text{Mod}_R$  verwenden. Frage: Warum funktioniert das nicht?*

Wir zeigen die Isomorphie von Tor und  $\text{Tor}'$ , indem wir zeigen, dass Tor zu einem dritten Funktor  $\widetilde{\text{Tor}}$  isomorph ist, der offensichtlich symmetrisch in seinen beiden Variablen ist. Dazu benötigen wir Doppelkomplexe.

**Definition.** Die Kategorie der *Doppelkomplexe* in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  hat als Objekte Tripel  $(X_{ij}, d_h, d_v)$  mit  $d_h: X_{ij} \rightarrow X_{i-1,j}$  und  $d_v: X_{ij} \rightarrow X_{i,j-1}$ , so dass  $d_h d_v = -d_v d_h$ ,  $d_h d_h = d_v d_v = 0$ . Die Morphismen sind gegeben durch  $f_{ij}: X_{ij} \rightarrow Y_{ij}$ , die mit  $d_h$  und  $d_v$  kommutieren. Assoziiert zu einem Doppelkomplex sind zwei einfache Komplexe

$$\begin{aligned} |X_{\bullet\bullet}|_n &= \bigoplus_{i+j=n} X_{ij} \\ (\text{Tot } X_{\bullet\bullet})_n &= \prod_{i+j=n} X_{ij}, \end{aligned}$$

wobei die Abbildungen in beiden Fällen gegeben sind durch  $d = d_h + d_v$ . Beide Komplexe werden als *Totalkomplex* bezeichnet.

**Bemerkung 3.5.5.** *Die Schiefkommutativität der Differenziale,  $d_h d_v = -d_v d_h$ , ist notwendig, damit  $|X|$  und  $\text{Tot } X$  wieder Kettenkomplexe sind: Ist  $x \in X_{ij}$ , so gilt*

$$d(dx) = d(d_h x + d_v x) = d_h d_h x + d_h d_v x + d_v d_h x + d_v d_v x = (d_h d_v + d_v d_h)(x).$$

**Definition.** Seien  $(P_{\bullet}, d)$  ein  $R^{\text{op}}$ -Kettenkomplex und  $(Q_{\bullet}, d)$  ein  $R$ -Kettenkomplex. Definiere einen  $\mathbf{Z}$ -Doppelkomplex  $(P \otimes_R Q)_{\bullet\bullet}$  durch

$$(P \otimes_R Q)_{i,j} = P_i \otimes_R Q_j,$$

wobei die Abbildungen für  $p \in P_i$ ,  $q \in Q_j$  gegeben sind durch  $d_h(p \otimes q) = d(p) \otimes q$  und  $d_v(p \otimes q) = (-1)^i p \otimes d(q)$ .

Wir nennen  $i$  den Grad von  $p$  und schreiben  $|p| = i$ ; wenn wir abstrakt den Grad von  $d$  mit  $-1$  definieren (da  $d$  ja von  $P_n$  nach  $P_{n-1}$  geht), so ist die obige Vorzeichenkonvention ein Sonderfall von folgender, an die man sich strikt halten sollte, damit man nicht durcheinanderkommt:

**3.5.6.** *Immer, wenn ein Element vom Grad  $i$  an einem Element vom Grad  $j$  vorbeigeschoben wird, wird ein Vorzeichen  $(-1)^{ij}$  eingeführt.*

### 3 Auflösungen und abgeleitete Funktoren

Ist stattdessen  $(P_\bullet, d)$  auch ein  $R$ -Kettenkomplex, so definiere den  $\mathbf{Z}$ -Doppelkomplex  $\text{Hom}_R(P, Q)_{\bullet\bullet}$  durch

$$\text{Hom}_R(P, Q)_{i,j} = \text{Hom}_R(P_i, Q_j).$$

**Definition.** Sei  $P_\bullet \rightarrow X$  eine projektive Auflösung von  $R^{\text{op}}$ -Moduln,  $Q_\bullet \rightarrow Y$  eine projektive Auflösung von  $R$ -Moduln. Dann ist

$$\widetilde{\text{Tor}}_n^R(X, Y) = H_n(|P \otimes_R Q|).$$

**Satz 3.5.7.** Für  $X \in \text{Mod}_{R^{\text{op}}}$  und  $Y \in \text{Mod}_R$  gilt  $\text{Tor}_n^R(X, Y) \cong \widetilde{\text{Tor}}_n^R(X, Y)$ .

Für den Beweis benötigen wir zunächst einen Hilfssatz.

**Lemma 3.5.8.** Sei  $X_{\bullet\bullet}$  ein Doppelkomplex in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$ . Falls für jedes  $i \in \mathbf{Z}$  gilt, dass  $X_{i,\bullet}$  exakt ist, so ist

1.  $|X|$  exakt, falls für ein  $N \in \mathbf{Z}$  gilt:  $X_{ij} = 0$  für  $j < N$ ;
2.  $\text{Tot } X$  exakt, falls für ein  $N \in \mathbf{Z}$  gilt:  $X_{ij} = 0$  für  $i < N$ .

Die Bedingungen (1) und (2) sind natürlich immer erfüllt, falls  $X$  nichtnegativ graduiert ist. Es sind keine notwendigen Bedingungen; man sagt, sie stellen die „Konvergenz“ sicher (vgl. dazu Kapitel 6 über Spektralsequenzen).

*Beweis.* Für den Beweis von (1) dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $N = 0$  gilt, ansonsten kann der Komplex vertikal verschoben werden. Ebenso ist es genug, Exaktheit an der Stelle  $|X|_0$  zu zeigen, denn durch Rechts- oder Linksverschiebung von  $X$  kann jede andere Stelle nach null verschoben werden.

Es gilt

$$|X|_0 = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} X_{-n,n} = \bigoplus_{n \geq 0} X_{-n,n}.$$

Sei  $x = (x_{n_0}, x_{n_0-1}, \dots, x_0) \in |X|_0$  ein beliebiges Element, mit  $x_n \in X_{-n,n}$ , und sei  $d(x) = 0$ . Dies bedeutet ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} d_h(x_{n_0}) &= 0 \\ d_v(x_i) + d_h(x_{i-1}) &= 0 \quad \text{für } 0 < i \leq n_0 \\ d_v(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Da die Zeilen exakt sind, gibt es Elemente  $y_n \in X_{-n+1,n}$ , so dass

$$\begin{aligned} d_h(y_{n_0}) &= x_{n_0} \\ d_h(y_i) &= x_i + d_v(y_{i+1}) \quad \text{für } 0 \leq i < n_0, \end{aligned}$$

denn

$$d_h(x_i + d_v(y_{i+1})) = d_h(x_i) - d_v d_h(y_{i+1}) = d_h x_i + d_v x_{i+1} + d_v d_v(y_{i+2}) = 0.$$

Damit ist mit  $y = (y_{n_0}, \dots, y_0) \in |X|_1$  ein Element mit  $d(y) = x$  gefunden.

Der Beweis von (2) ist ähnlich. □

*Beweis des Satzes.* Seien  $P_\bullet \rightarrow X, Q_\bullet \rightarrow Y$  projektive Auflösungen. Wir bezeichnen mit  $\tilde{P}_\bullet$  den *augmentierten Komplex*  $\tilde{P}_n = P_n$  für  $n \geq 0$  und  $P_{-1} = X$ . Dann ist  $\tilde{P}$  exakt, und da  $Q_i$  projektiv für jedes  $i$  ist, ist auch der Doppelkomplex  $\tilde{P} \otimes Q$  zeilenweise exakt. Nach dem Lemma ist damit  $|\tilde{P} \otimes Q|$  ebenfalls exakt.

Trivialerweise ist

$$0 \rightarrow X[-1] \rightarrow \tilde{P}_\bullet \rightarrow P_\bullet \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz, wobei  $X[-1]$  den Komplex bezeichnet, der in Dimension  $-1$  der Modul  $X$  ist und  $0$  überall sonst. Da  $Q_i$  projektiv und der Funktor  $|-|$  exakt ist, erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Totalkomplexen

$$0 \rightarrow |X[-1] \otimes Q| \rightarrow |\tilde{P} \otimes Q| \rightarrow |P \otimes Q| \rightarrow 0.$$

Die dazugehörige lange exakte Sequenz zerfällt in Stücke

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n |P \otimes Q| & \longrightarrow & H_{n+1} |X[-1] \otimes Q| & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{\text{Tor}}_n^R(X, Y) & \longrightarrow & H_n(X \otimes Q) = \text{Tor}_n^R(X, Y) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Damit ist die Isomorphie gezeigt. □

Insbesondere gilt, wenn  $R$  kommutativ ist,  $\text{Tor}_*^R(X, Y) \cong \text{Tor}_*^R(Y, X)$ .

**Satz 3.5.9.** *Definiere für  $X, Y \in \text{Mod}_R$*

$$\text{Ext}_R^n(X, Y) = H^n(\text{Hom}_R(X, I_\bullet)) \quad \text{und} \quad \widetilde{\text{Ext}}_R^n(X, Y) = H^n(\text{Tot Hom}_R(P, I)),$$

wobei  $Y \rightarrow I_\bullet$  eine injektive Auflösung und  $P_\bullet \rightarrow X$  eine projektive Auflösung ist. Dann gilt

$$\text{Ext}_R^n(X, Y) = \text{Ext}'_R^n(X, Y) = \widetilde{\text{Ext}}_R^n(X, Y).$$

*Beweis.* Übung. □

### 3.5.2 Yoneda-Ext

Während die Bezeichnung „Tor“ sich leicht mit der Torsion in abelschen Gruppen erklären lässt, ist bisher unklar geblieben, wofür „Ext“ steht. In diesem Abschnitt wird eine alternative Definition von Ext-Gruppen durch Äquivalenzklassen von Erweiterungen (extensions) von  $R$ -Moduln durch andere  $R$ -Moduln vorgestellt, die auf Yoneda zurückgeht.

Sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie und  $M, N$  zwei Objekte. Betrachte für  $n \geq 1$  die Mengen von exakten Sequenzen

$$\text{Ex}^n(M, N) = \{0 \rightarrow N \rightarrow X_{n-1} \rightarrow X_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0\} / \sim,$$

wobei  $\sim$  die Äquivalenzrelation ist, die erzeugt wird von  $E \sim E'$ , wenn es eine (Leiter-) Abbildung  $E \rightarrow E'$  gibt, die auf den  $M$ - und  $N$ -Einträgen die Identität ist. Tatsächlich lässt sich  $\text{Ex}^n$  als Funktor  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  beschreiben: Ist

$$E = (0 \rightarrow N \rightarrow X_\bullet \rightarrow M \rightarrow 0) \in \text{Ex}^*(M, N), \quad f: M' \rightarrow M \quad \text{und} \quad g: N \rightarrow N',$$

### 3 Auflösungen und abgeleitete Funktoren

so definiere

$$f^*E: 0 \rightarrow N \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \times_M M' \rightarrow M' \rightarrow 0$$

und

$$g_*E: 0 \rightarrow N' \rightarrow X_{n-1} \sqcup_N N' \rightarrow X_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Hierbei bezeichnet  $\times_M$  das Pullback über  $M$  und  $\sqcup_N$  das Pushout unter  $N$  (vgl. Übung 2.1.4).

Für die Wohldefiniertheit muss gezeigt werden, dass  $f^*$  nicht vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse abhängt. Sei also

$$\begin{array}{ccccccc} E: 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_\bullet & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ E': 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X'_\bullet & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

eine elementare Äquivalenz von exakten Sequenzen und  $f: M' \rightarrow M$  ein Morphismus. Dann erhalten wir eine kanonische Abbildung  $X_0 \times_M M' \rightarrow X'_0 \times_M M'$ , die zusammen mit den anderen Abbildungen  $X_i \rightarrow X'_i$  eine elementare Äquivalenz zwischen  $f^*E$  und  $f^*E'$  liefert. Das duale Argument funktioniert für  $g_*$ .

Nun zur Funktorialität: seien  $M_2 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_0} M_0$  zwei Morphismen; es ist zu zeigen, dass  $(f_0 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_0^*$ . Dies folgt sofort aus dem kanonischen Isomorphismus

$$(X_0 \times_{M_0} M_1) \times_{M_1} M_2 \cong X_0 \times_{M_0} M_2.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass  $f^*g_* = g_*f^*$  ist für  $f: M' \rightarrow M$  und  $g: N \rightarrow N'$ . Das ist klar für  $n \geq 2$ , da die beiden Funktoren dann auf verschiedenen Teilen der exakten Sequenz operieren. Aber für  $n = 1$  müssen wir zeigen, dass es einen Isomorphismus

$$(X \times_M M') \sqcup_N N' \cong (X \sqcup_N N') \times_M M'$$

gibt, der eine Äquivalenz der Sequenzen  $f^*g_*E$  und  $g_*f^*E$  erzeugt. Beide Seiten sind aber gleich der abelsche Gruppe

Füge ein element-  
freies Argument  
ein!

$$\frac{\{(x, m', n') \mid x \in X, m' \in M', n \in N', f(m') = d(x)\}}{(d(n)x, m', n') \sim (x, m', g(n))} \quad (n \in N),$$

wobei  $d$  die Morphismen in der exakten Sequenz  $0 \rightarrow N \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$  bezeichnet.

**Lemma 3.5.10.** Die Mengen  $\text{Ex}^n(M, N)$  erhalten eine abelsche Gruppenstruktur durch die folgende Operation: Seien  $E, E' \in \text{Ex}^n(M, N)$ . Dann definiere für  $n \geq 2$ :

$$E + E': 0 \rightarrow N \rightarrow X_{n-1} \sqcup_N X'_{n-1} \rightarrow X_{n-2} \oplus X'_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \oplus X'_1 \rightarrow X_0 \times_M X'_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Im Fall  $n = 1$  müssen wir den mittleren Term von  $E + E'$  definieren als

$$\{(x, x') \in X \oplus X' \mid d(x) = d(x')\} / (d(n)x, x') \sim (x, d(n)x') \quad (n \in N).$$

*Beweis.* Zunächst zeigen wir die Exaktheit von  $E + E'$ . Exaktheit bei  $N$  und  $M$  ist klar, und auch bei den mittleren (direkten Summen-) Gruppen. Zur Exaktheit bei  $X_0 \times_M X'_0$ : Der Kern von  $X_0 \times_M X'_0$  ist genau  $\ker(X_0 \rightarrow M) \times \ker(X'_0 \rightarrow M) = \text{im}(X_1 \oplus X'_1)$ . Die Exaktheit bei  $X_{n-1} \sqcup_N X'_{n-1}$  folgt dual.

Um die abelsche Gruppenstruktur zu definieren, brauchen wir zunächst ein neutrales Element; dieses ist gegeben durch

$$0 \rightarrow N \rightarrow N \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 0$$

bzw. (für  $n = 1$ ) durch die zerfallende kurze exakte Sequenz.

Die Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation ist aus der Definition sofort ersichtlich; wir müssen nun noch Inverse konstruieren. Dies verschieben wir einfach auf die nächste Übung, wo wir zeigen, dass  $\text{Ex}^n$  als Monoid isomorph zu einer Gruppe ist.  $\square$

**Satz 3.5.11.** *Hat  $\mathcal{C}$  genug Projektive, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus von Funktoren  $\text{Ex}^n \cong \text{Ext}^n$ .*

*Beweis.* Sei  $P_\bullet \rightarrow M$  eine projektive Auflösung von  $M$ . Sei  $E \in \text{Ex}^n(M, N)$ . Dann hat das Hochhebungsproblem

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_{n+1} & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & P_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \parallel & & \\
 E: & & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & X_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

eine Lösung, und wir erhalten ein Element

$$\phi(E) \in \ker(\text{Hom}(P_n, N) \rightarrow \text{Hom}(P_{n+1}, N)) \rightarrow \text{Ext}^n(M, N).$$

Zeige, dass  $\phi(E) \in \text{Ext}^n(M, N)$  wohldefiniert ist, und dass  $\phi: \text{Ex}^n(M, N) \rightarrow \text{Ext}^n(M, N)$  ein Isomorphismus von abelschen Gruppen ist.

Das Fundamentallemma garantiert eine Lösung  $f: P_n \rightarrow N$ , die eindeutig bis auf Homotopie ist. Das heißt, jede weitere Lösung ist von der Form  $f + H \circ d$ , wobei  $H: P_{n-1} \rightarrow N$  Teil einer Kettenhomotopie ist. Also ist die Klasse von  $f$  in  $H^n(\text{Hom}(P_\bullet, N)) = \text{Ext}^n(M, N)$  wohldefiniert, wenn wir zeigen können, dass sie invariant unter der Äquivalenzrelation in  $\text{Ex}$  ist. Ist aber  $E \rightarrow E'$  eine elementare Äquivalenz, so können wir die Hochhebung  $P_\bullet \rightarrow E'$  so wählen, dass es die Hochhebung von  $P_\bullet \rightarrow E$  ist, gefolgt von der Abbildung  $E \rightarrow E'$ . Da diese die Identität auf  $N$  ist, erhalten wir das gleiche Element in  $\text{Ext}^n$ .

Ist umgekehrt  $f: P_n \rightarrow N$  ein Repräsentant eines Elementes von  $\text{Ext}^n(M, N)$ , so können wir daraus eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow N \rightarrow N \sqcup_{P_n} P_{n-1} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

### 3 Auflösungen und abgeleitete Funktoren

basteln. Es ist klar, dass die Komposition  $\text{Ext} \rightarrow \text{Ex} \rightarrow \text{Ext}$  die Identität ist; die andere Richtung ist gegeben durch das folgende Diagramm, das eine Äquivalenz in  $\text{Ex}$  anzeigt:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N \sqcup_{P_n} P_{n-1} & \longrightarrow & P_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow (d, f_{n-1}) & & \downarrow f_{n-2} & & & & \downarrow f_0 & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{d} & X_{n-1} & \xrightarrow{d} & X_{n-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Es ist klar, dass die Null in  $\text{Ex}^n$  auf die Null in  $\text{Ext}^n$  abgebildet wird (wir können als Hochhebung auf  $P_n$  den Nullmorphismus wählen). Wir müssen nun noch zeigen, dass die Bijektion zwischen  $\text{Ext}^n$  und  $\text{Ex}^n$  die Addition respektiert. Dazu beobachten wir zunächst, dass wir die Addition in  $\text{Ext}^n$  wir folgt charakterisieren können: Ist  $\Delta: N \rightarrow N \oplus N$  die Diagonalabbildung und  $\Sigma: N \oplus N \rightarrow N$  die Summenabbildung, so ist

$$f + g: \text{Ext}(M, N) \oplus \text{Ext}(M, N) \rightarrow \text{Ext}(M \oplus M, N \oplus N) \xrightarrow{\Sigma_* \Delta^*} \text{Ext}(M, N).$$

Ebenso gilt in  $\text{Ex}^n$ :

$$E + E' \cong \Sigma_* \Delta^*(E \oplus E'),$$

wobei  $E \oplus E'$  die direkte Summensequenz von  $N \oplus N$  nach  $M \oplus M$  ist. Wählen wir eine projektive Auflösung von  $M$ , so können wir in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_n \oplus P_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 \oplus P_0 & \longrightarrow & M \oplus M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow (f, f') & & & & \downarrow (f, f') & & \parallel & & \\
 E \oplus E': & & N \oplus N & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_0 \oplus X'_0 & \longrightarrow & M \oplus M & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

die Hochhebung als die direkt Summe der Hochhebungen definieren, die zu  $E$  bzw.  $E'$  gehören; damit ist die Additivität gezeigt.  $\square$

**Satz 3.5.12 (Yoneda-Produkt).** *Ist  $E \in \text{Ex}^n(M, N)$ ,  $E' \in \text{Ex}^m(Q, M)$ , so definiere  $EE' \in \text{Ex}^{n+m}(Q, N)$  durch die Erweiterung*

$$0 \rightarrow N \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow X'_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X'_0 \rightarrow Q,$$

wobei die mittlere Abbildung die Komposition  $X_0 \rightarrow M \rightarrow X'_{m-1}$  ist.  $(E, E') \mapsto EE'$  ist eine wohldefinierte, bilineare, assoziative Multiplikation.

*Beweis.* Für  $m$  und  $n > 0$  erhalten wir nach Konstruktion wieder eine exakte Sequenz, und die Assoziativität ist sofort klar. Ebenso die Wohldefiniertheit, denn zwei elementare Äquivalenzen können zu einer Äquivalenz des Produktes zusammengeklebt werden.

Wir definieren  $\text{Ex}^0(M, N)$  sinnvollerweise als  $\text{Hom}(M, N)$ ; die Multiplikation  $\text{Ex}^0 \times \text{Ex}^0$  ist dann einfach Komposition, und  $\text{Ex}^0 \times \text{Ex}^n$  bzw.  $\text{Ex}^n \times \text{Ex}^0$  sind, was wir vorher mit  $f^*$  und  $f_*$  bezeichnet hatten. Die Assoziativität entspricht dann genau der Funktorialität von  $\text{Ex}^n$ .  $\square$

# 4 Gruppenhomologie und -kohomologie

## 4.1 Definition und Beispiele

Sei  $G$  eine Gruppe. Ein  $G$ -Modul ist per Definition ein  $\mathbf{Z}[G]$ -Modul, wobei  $\mathbf{Z}[G]$  der Gruppenring ist, der in Abschnitt 1.1 definiert wurde. Expliziter ist dies eine abelsche Gruppe  $M$  zusammen mit einer linearen  $G$ -Operation  $G \rightarrow \text{Aut}(M)$ .

Ist  $A$  eine abelsche Gruppe, so verstehen wir  $A$  auch als  $G$ -Modul mit der trivialen Operation, ohne dies in der Schreibweise anzudeuten.

**Definition.** Die *Invarianten*  $M^G$  eines  $G$ -Moduls  $M$  sind die Fixpunkte der  $G$ -Operation:  $M^G = \{m \in M \mid g.m = m \text{ für alle } g \in G\}$ . Die *Koinvarianten*  $M_G$  sind definiert als  $M_G = M / (gm - m \mid g \in G, m \in M)$ .

Bei den Invarianten und Koinvarianten handelt es sich um additive Funktoren

$$(-)^G, (-)_G: \text{Mod}_{\mathbf{Z}[G]} \rightarrow \text{Ab},$$

denn ist  $f: M \rightarrow N$  ein  $\mathbf{Z}[G]$ -Modulmorphismus (also eine  $G$ -äquivalente Abbildung), so schränkt er sich ein zu einem Homomorphismus  $f^G: M^G \rightarrow N^G$ , und weil  $f(gm - m) = gf(m) - f(m)$ , induziert er auch einen Homomorphismus  $f_G: M_G \rightarrow N_G$ .

**Lemma 4.1.1.** *Es gibt natürliche Isomorphismen  $M^G \cong \text{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(\mathbf{Z}, M)$  und  $M_G \cong \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}[G]} M$ .*

*Beweis.* Der erste Isomorphismus ist klar, und der zweite fast ebenso:

$$1 \otimes (gm - m) = (1.g) \otimes m - 1 \otimes m = 0 \in \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}[G]} M. \quad \square$$

Also folgt insbesondere, dass  $(-)^G$  linksexakt und  $(-)_G$  rechtsexakt sind (Bsp. 2.2.5).

**Definition** (und Korollar). Sei  $M$  ein  $\mathbf{Z}[G]$ -Modul. Die *Homologie der Gruppe  $G$  mit Koeffizienten in  $M$*  ist definiert als

$$H_n(G; M) = (L_n(-)_G)(M) = \text{Tor}_n^{\mathbf{Z}[G]}(\mathbf{Z}, M),$$

der  $n$ -te abgeleitete Funktor der Koinvarianten. Die *Kohomologie der Gruppe  $G$  mit Koeffizienten in  $M$*  ist definiert als

$$H^n(G; M) = (R^n(-)^G)(M) = \text{Ext}_{\mathbf{Z}[G]}^n(\mathbf{Z}, M).$$

Für den trivialen  $G$ -Modul  $\mathbf{Z}$  schreiben wir auch einfacher  $H_n(G)$ ,  $H^n(G)$ .

#### 4 Gruppenhomologie und -kohomologie

**Bemerkung 4.1.2.** Eigentlich funktioniert das alles auch für Monoide  $G$ , aber spätere Methoden funktionieren nur mit Gruppen, daher beschränken wir uns hier schon auf Gruppen.

**Beispiel 4.1.3** (Homologie der Gruppen  $C_n$ ). Sei  $G = C_n = \{1, t, \dots, t^{n-1}\}$  die zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ . Dann ist  $\mathbf{Z}[G] \cong \mathbf{Z}[t]/(t^n - 1)$ , und die Kohomologie wurde schon in Beispiel 3.5.3 berechnet:

$$H_k(C_n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{falls } k = 0 \\ \mathbf{Z}/n, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachten wir nun den trivialen  $\mathbf{Z}[G]$ -Modul  $\mathbf{Z}/n$ . Nach Tensorieren der Auflösung aus Beispiel 3.5.3 mit  $\mathbf{Z}/n$  ergibt sich der Komplex

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/n \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/n \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/n \rightarrow 0$$

und somit

$$H_k(C_n; \mathbf{Z}/n) \cong \mathbf{Z}/n \text{ für alle } k \geq 0.$$

Betrachten wir den allgemeinen Fall: Sei  $M$  ein  $C_p$ -Modul. Multiplikation mit  $N = 1 + t + \dots + t^{n-1}$  ist eine Abbildung  $M \rightarrow M^G$ ; da außerdem gilt, dass  $Ngm = Nm$  für alle  $g \in C_p$ , folgt, dass es eine Normabbildung  $\bar{N}: M_G \rightarrow M^G$  induziert. Nach Tensorieren der Auflösung mit  $M$  erhalten wir:

$$H_k(C_n; M) \cong \begin{cases} M_G; & \text{falls } k = 0 \\ \text{coker } \bar{N}; & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \ker \bar{N}; & \text{falls } k > 0 \text{ gerade.} \end{cases}$$

Ebenso können wir die Kohomologie ausrechnen. Indem wir  $\text{Hom}_R(-, M)$  auf die Auflösung aus Beispiel 3.5.3 anwenden, erhalten wir den Komplex

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{1-t} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{1-t} M \xrightarrow{N} \dots$$

und somit

$$H^k(C_n; M) \cong \begin{cases} M^G; & \text{falls } k = 0 \\ \ker \bar{N}; & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \text{coker } \bar{N}; & \text{falls } k > 0 \text{ gerade.} \end{cases}$$

**Beispiel 4.1.4** (Homologie der Gruppe  $\mathbf{Z}$ ). Der Gruppenring der Gruppe  $G = \mathbf{Z}$  ist  $\mathbf{Z}[G] \cong \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ , der Ring der Laurentpolynome  $a_m t^m + \dots + a_n t^n$ ,  $m \leq n \in \mathbf{Z}$ . Eine freie Auflösung von  $\mathbf{Z}$  über  $\mathbf{Z}[G]$  ist gegeben durch

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}[t, t^{-1}] \xrightarrow{1-t} \mathbf{Z}[t, t^{-1}] \xrightarrow{t \rightarrow 1} \mathbf{Z}.$$

Damit gilt:

$$H_0(G; M) = H^1(G; M) = M_G \text{ und } H_1(G; M) = H^0(G; M) = M^G.$$

Alle höhere Homologie und Kohomologie ist null, weil die Auflösung nur Länge 2 hat.

### 4.1.1 Funktorialität

Homologie und Kohomologie sind Funktoren, allerdings muss man sorgfältig sein bei der Definition. Betrachte die Kategorie  $\text{GrpMod}$ , deren Objekte Paare aus einer Gruppe  $G$  und einem  $G$ -Modul  $M$  sind, und deren Morphismen definiert sind durch

$$\text{Hom}_{\text{GrpMod}}((G, M), (G', M')) = \{ \alpha: G \rightarrow G', f: M \rightarrow M' \mid f(g.m) = \alpha(g)f(m) \}.$$

**Proposition 4.1.5.** *Gruppenhomologie ist ein Funktor  $\text{GrpMod} \rightarrow \text{Ab}$ .*

**Bemerkung 4.1.6.** *Dies schließt zwei wichtige Fälle ein: Für festes  $G$  kann die Kategorie  $\text{Mod}_{\mathbf{Z}[G]}$  als Unterkategorie von  $\text{GrpMod}$  aufgefasst werden, und Homologie ist ein Funktor darauf; das wussten wir aber schon wegen der Funktorialität von  $\text{Tor}$ . Andererseits kann man eine abelsche Gruppe  $M$  festhalten und  $\text{Grp} \hookrightarrow \text{GrpMod}$  als eine Unterkategorie auffassen, indem die Gruppe  $G$  abgebildet wird auf  $(G, M)$  mit der trivialen  $G$ -Modulstruktur auf  $M$ . Damit erhält man also für jeden Gruppenmorphismus  $\alpha: G \rightarrow H$  eine induzierte Abbildung  $\alpha_*: H_i(G) \rightarrow H_i(H)$ .*

*Beweis.* Sei  $(\alpha, f): (G, M) \rightarrow (H, N)$  ein Morphismus. Wähle projektive Auflösungen  $P_\bullet \rightarrow M$  über  $\mathbf{Z}[G]$  und  $Q_\bullet \rightarrow N$  über  $\mathbf{Z}[H]$ . Wir können  $Q_\bullet$  als  $\mathbf{Z}[G]$ -Komplex auffassen mittels  $\alpha$ ; er ist dann zwar nicht mehr projektiv, aber immer noch azyklisch. Wegen des Fundamentallemmas gibt es eine bis auf Homotopie eindeutige Hochhebung  $\tilde{f}: P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ . Diese induziert einen Morphismus

$$\text{id} \otimes \tilde{f}: \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}[G]} P_\bullet \rightarrow \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}[H]} Q_\bullet$$

und somit eine wohldefinierte Abbildung  $(\alpha, f)_*: H_i(G; M) \rightarrow H_i(H; N)$ . Die Funktorialität folgt aus der Eindeutigkeit.  $\square$

**Beispiel 4.1.7.** Wir zeigen, dass die von  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n$  induzierte Abbildung auf  $H_1(-; \mathbf{Z})$  surjektiv ist. Wir betrachten die Standardauflösungen aus den Beispielen 4.1.3 und 4.1.4 und eine offensichtliche Hochhebung der Identität auf  $\mathbf{Z}$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}[t, t^{-1}] & \xrightarrow{1-t} & \mathbf{Z}[t, t^{-1}] & \longrightarrow & \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow t \rightarrow t & & \downarrow t \rightarrow t & & \parallel \\ \dots & \xrightarrow{N} & \mathbf{Z}[t]/(t^n - 1) & \xrightarrow{1-t} & \mathbf{Z}[t]/(t^n - 1) & \longrightarrow & \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Durch Übergang zu den Koinvarianten auf den Auflösungen erhalten wir:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ \dots & \xrightarrow{n} & \mathbf{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

also ist die Abbildung auf  $H_1$  die Standardreduktion  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n$ .

## 4 Gruppenhomologie und -kohomologie

**Satz 4.1.8.** Sei  $g_0 \in G$  und betrachte den Automorphismus  $(\alpha, f)$  in  $\text{GrpMod}$ , der gegeben ist durch  $\alpha(g) = g_0 g g_0^{-1}$  und  $f(m) = g_0 m$ . Dann ist  $(\alpha, f)_* = \text{id}_{H_*(G; M)}$ .

*Beweis.* Sei  $P_\bullet \rightarrow M$  eine projektive Auflösung von  $M$  über  $\mathbf{Z}[G]$ . Definiere einen Automorphismus von  $P_\bullet$  durch  $\tau(x) = g_0 \cdot x$  für  $x \in P_n$ , für alle  $n$ . Dann ist  $\tau$  ein Automorphismus von Kettenkomplexen, der  $f: M \rightarrow M$  fortsetzt, also kann  $(\alpha, f)_*$  berechnet werden als die von  $\tau$  induzierte Abbildung in Homologie. Aber  $\tau: \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}[G]} P_n \rightarrow \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}[G]} P_n$  ist die Identität.  $\square$

**Bemerkung 4.1.9.** Ist  $G$  eine Gruppe, so nennt man die Automorphismen, die sich durch Konjugation darstellen lassen, die inneren Automorphismen; diese bilden einen Normalteiler  $\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$ . Die Quotientengruppe  $\text{Out}(G)$  heißt die Gruppe der äußeren Automorphismen. Der vorige Satz zeigt, dass  $H_*(G)$  eine Operation von  $\text{Out}(G)$  hat.

### 4.1.2 Die Bar-Auflösung

In den bisherigen Beispielen haben wir stets Auflösungen ad hoc konstruiert. Die Frage liegt nahe, ob es eine kanonische, genauer gesagt *funktorielle*, Art gibt, eine Auflösung eines Moduls über  $\mathbf{Z}[G]$  zu erzeugen. Die Antwort ist ja, aber für Berechnungen eignet sie sich selten, weil sie sehr groß ist.

**Definition.** Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Definiere den *Bar-Komplex*  $B_\bullet(R; M)$  durch

$$B_n(R; M) = R^{\otimes n+1} \otimes M = R \otimes_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes_{\mathbf{Z}} R \otimes_{\mathbf{Z}} M,$$

wobei die Strukturabbildungen  $d: B_n(R, M) \rightarrow B_{n-1}(R, M)$  gegeben sind durch

$$d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i \quad \text{mit} \quad d_i(r_0 | \cdots | r_{n+1}) = r_0 | \cdots | r_i r_{i+1} | \cdots | r_{n+1},$$

mit  $r_i \in R$  für  $r \leq n$  und  $r_{n+1} \in M$ . Die Schreibweise  $a|b$  für  $a \otimes b$  hat historische Gründe und gibt dem Bar-Komplex seinen Namen. Die Sequenz  $B_\bullet(R; M)$  hat eine  $R$ -Modulstruktur durch

$$r \cdot (r_0 | \cdots | r_n | m) = r r_0 | r_1 | \cdots | r_n | m.$$

**Proposition 4.1.10.** Die Sequenz  $B_\bullet(R; M)$  ist eine Auflösung von  $M$  über  $R$ .

*Beweis.* Um zu zeigen, dass  $B_\bullet(R; M)$  ein Komplex ist, beachten wir, dass

$$d_i \circ d_j = d_j \circ d_{i+1} \quad \text{falls } i \geq j$$

und also

$$\begin{aligned} d \circ d &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} d_i \circ d_j = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} d_i \circ d_j + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j} d_i \circ d_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j-1} d_j \circ d_i + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j} d_i \circ d_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j-1} d_j \circ d_i + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j} d_i \circ d_j = 0. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $B_\bullet(R; M)$  exakt ist. Dazu konstruieren wir eine Kettenkontraktion (d. h.  $-$ nullhomotopie)  $h: B_n(R; M) \rightarrow B_{n+1}(R; M)$ , so dass  $h \circ d + d \circ h = \text{id}$ . Sei

$$h(r_0 | \cdots | r_n) = 1 | r_0 | \cdots | r_n.$$

Dann gilt  $h \circ d_i = d_{i+1} \circ h$  und damit

$$d \circ h + h \circ d = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i \circ h + \sum_{i=0}^n (-1)^i h \circ d_i = d_0 \circ h = \text{id}. \quad \square$$

**Bemerkung 4.1.11.** Der Modul  $B_n(R, M)$  ist nicht unbedingt projektiv; ist zum Beispiel  $R = \mathbf{Z}$  und  $M = \mathbf{Z}/n$ , so ist  $B_n(R; M) = \mathbf{Z}/n$ . Sind aber  $R$  und  $M$  als abelsche Gruppen frei, so ist auch  $B_n(R; M)$  ein freier  $R$ -Modul für alle  $n$ . Allgemeiner gilt, wenn  $k$  ein kommutativer Grundring ist,  $R$  eine  $k$ -Algebra, und alle Tensorprodukte in  $B_n(R; M)$  über  $k$  gebildet werden, dass  $B_n(R; M)$  ein freier  $R$ -Modul ist, wenn  $R$  und  $M$  freie  $k$ -Moduln sind.

**Beispiel 4.1.12** (erste Homologiegruppe). Sei  $G$  eine beliebige Gruppe, und bezeichne mit  $G_{\text{ab}}$  die Abolisierung, d. h. den maximalen abelschen Quotienten von  $G$ . Es gilt  $G_{\text{ab}} = G/G'$ , wobei  $G'$  der Normalteiler ist, der erzeugt wird von Kommutatoren  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$  mit  $x, y \in G$ .

Es gilt immer:  $H_1(G; \mathbf{Z}) \cong G_{\text{ab}}$ . Dazu betrachten wir den Anfang der Bar-Auflösung von  $\mathbf{Z}$  über  $\mathbf{Z}[G]$ :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}[G] \otimes \mathbf{Z}[G] \otimes \mathbf{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbf{Z}[G] \otimes \mathbf{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbf{Z}[G] \\ g_0 | g_1 | g_2 & \longmapsto & g_0 g_1 | g_2 - g_0 | g_1 g_2 + g_0 | g_1 & & \\ & & g_0 | g_1 & \longmapsto & g_0 g_1 - g_0 \end{array}$$

Nach dem Tensorieren dieser Sequenz von links mit  $\mathbf{Z}$  über  $\mathbf{Z}[G]$  erhalten wir:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}[G] \otimes \mathbf{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbf{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ g_1 | g_2 & \longmapsto & g_2 - g_1 g_2 + g_1 & & \\ & & g_i & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Also ist

$$H_1(G; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[G] / (g_1 + g_2 - g_1 g_2 \mid g_1, g_2 \in G)$$

Also ist die offensichtliche Abbildung  $G \rightarrow H_1(G; \mathbf{Z})$  ein Epimorphismus von Gruppen. Es genügt nun, zu zeigen, dass jeder Morphismus  $f: G \rightarrow A$  in eine abelsche Gruppe eindeutig durch  $H_1(G; \mathbf{Z})$  faktorisiert. Da  $A$  abelsch ist, kann man  $f$  auf eindeutige Weise zu einem Homomorphismus  $\mathbf{Z}[G] \rightarrow A$  fortsetzen, nämlich durch  $\sum_g a_g [g] \mapsto \sum_g a_g f(g)$ . Unter dieser Abbildung geht ein Element der Form  $g_1 + g_2 - g_1 g_2$  offensichtlich nach null.

## 4.2 Gruppenkohomologie und Gruppenerweiterungen

Sei  $G' \triangleleft G$  ein Normalteiler in einer Gruppe  $G$  mit Quotient  $G''$ . Wir erlauben uns, dies in Form einer exakten Sequenz  $1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1$  zu notieren, obwohl die Kategorie der Gruppen nicht abelsch ist. Wir nennen in diesem Fall  $G$  eine *Erweiterung von  $G''$*  durch  $G'$ . Zwei Erweiterungen heißen *äquivalent*, falls es ein kommutatives Diagramm gibt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & G_1 & & \\
 & & & & \downarrow f & & \\
 1 & \longrightarrow & G' & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & G'' \longrightarrow 1 \\
 & & & & G_2 & & 
 \end{array}$$

In diesem Fall ist  $f$  automatisch ein Isomorphismus. Ist eine Erweiterung  $G$  mit abelschem Normalteiler  $G'$  gegeben, so operiert  $G''$  auf  $G'$  wie folgt. Sei  $g$  ein Urbild von  $g'' \in G''$  in  $G$ .

$$g'' \cdot g' := gg'g^{-1}.$$

Da  $G'$  ein Normalteiler ist, liegt  $g'' \cdot g'$  wieder in  $G'$ . Die Wahl von  $g$  ist unerheblich, denn zwei solche Wahlen unterscheiden sich durch ein Element von  $G'$ , und Konjugation mit Elementen von  $G'$  ist die Identität auf  $G'$ , weil  $G'$  als abelsch angenommen war.

Umgekehrt lässt sich aus jeder Operation von  $G''$  auf einer beliebigen Gruppe  $G'$  eine Erweiterung  $G = G' \rtimes G''$ , das *semi-direkte Produkt*, bilden. Die zu Grunde liegende Menge von  $G$  ist  $G' \times G''$ , und die Multiplikation ist definiert durch

$$(g'_1, g''_1)(g'_2, g''_2) = (g'_1(g''_1 \cdot g'_2), g''_1 g''_2).$$

(Merkregel für die Richtung des Zeichens  $\rtimes$ : Das Dreieck zeigt in Richtung des Normalteilers). Diese Erweiterung zerfällt, denn  $s_0: G' \xrightarrow{g' \mapsto (g', 1)} G' \rtimes G''$  ist ein Schnitt. Sind  $s_1, s_2$  Schnitte, so heißen sie *äquivalent*, falls sie sich nur durch Konjugation mit einem Element aus  $G'$  unterscheiden, d. h. falls  $s_2(g'') = g'_1 s_1(g'')(g'_1)^{-1}$  für ein  $g'_1 \in G'$  und alle  $g''$  gilt.

Folgende natürliche Fragen stellen sich:

- Zerfallen alle Erweiterungen? Wenn nein, wie lassen sie sich bis auf Äquivalenz bestimmen?
- Ist  $s_0$  der einzig mögliche Schnitt? Wenn nein, wie lässt sich die Menge aller Schnitte bis auf Äquivalenz beschreiben?

Gruppenkohomologie beantwortet beide Fragen, zumindest für abelsche  $G'$ . Wir betrachten zunächst den zweiten Punkt. Ein Schnitt  $s = (d, \text{id}): G'' \rightarrow G' \times G''$  muss die Identität auf der zweiten Koordinate sein; auf der ersten jedoch muss gelten, wobei die Gruppenstruktur auf  $G'$  additiv geschrieben wird:

$$\delta(g''_1 g''_2) = \delta(g''_1) + g''_1 \cdot \delta(g''_2) \tag{4.2.1}$$

Dies definiert eine abelsche Gruppenstruktur auf der Menge aller Schnitte, denn wenn  $\delta_1$  und  $\delta_2$  beide (4.2.1) erfüllen, dann auch  $\delta_1 + \delta_2$ . Ein Schnitt ist genau dann äquivalent zum Nullschnitt  $s_0$ , wenn es ein  $g' \in G'$  gibt, so dass

$$\delta(g'') = g' - g''(g').$$

## 4.2 Gruppenkohomologie und Gruppenerweiterungen

**Proposition 4.2.2.** Die Gruppe der Schnitte  $G'' \rightarrow G' \rtimes G''$  ist isomorph zu  $H^1(G'', G')$ .

*Beweis.* Wir betrachten die Bar-Auflösung und studieren

$$C^n = \text{Hom}_{\mathbf{Z}[G'']}(\mathbf{Z}[G'']^{\otimes n+1}, G').$$

Dann gilt  $H^n(G'', G') = H^n(C^\bullet)$ . Ein Element in  $C^1$  ist eine  $\mathbf{Z}[G'']$ -linearer Morphismus

$$f: \mathbf{Z}[G''] \otimes \mathbf{Z}[G''] \rightarrow G',$$

also äquivalent ein  $\mathbf{Z}$ -linearer Morphismus  $s: \mathbf{Z}[G''] \rightarrow G'$  ( $f(g_1''|g_2'') = g_1'' \cdot s(g_2'')$ ) oder eine Funktion  $\delta: G'' \rightarrow G'$ . Die Funktion  $f$  ist genau dann ein Kozykel, wenn

$$0 = df(g_0''|g_1''|g_2'') = f(g_0''g_1''|g_2'') - f(g_0''|g_1''g_2'') + f(g_0''|g_1''),$$

also falls  $0 = g_1''\delta(g_2'') - \delta(g_1''g_2'') + \delta(g_1'')$  (wir setzen  $g_0'' = 1$ ), also falls  $\delta$  (4.2.1) erfüllt. Umgekehrt ist  $f$  genau dann ein Korand, wenn es ein  $\tilde{f}: \mathbf{Z}[G] \rightarrow G''$  gibt mit

$$f(g_0''|g_1'') = \tilde{f}(g_0'') - \tilde{f}(g_1''),$$

also falls es ein  $g' = \tilde{f}(1)$  gibt, so dass

$$\delta(g_1'') = g' - g_1''(g'). \quad \square$$

**Satz 4.2.3.** Sei  $G''$  eine Gruppe mit einer Operation auf der abelschen Gruppe  $G'$ . Dann gibt es eine Bijektion von der Menge der Erweiterungen von  $G''$  durch  $G'$  modulo Äquivalenz nach  $H^2(G'', G')$ .

*Beweis.* Sei  $E: 1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1$  eine solche Erweiterung. Wähle einen Schnitt  $s: G'' \rightarrow G$  von Mengen (im Allgemeinen gibt es keinen linearen Schnitt). Definiere die Funktion

$$f_{E,s}: G'' \times G'' \rightarrow G', \quad f_{E,s}(g_1'', g_2'') = s(g_1'')s(g_2'')s(g_1''g_2'')^{-1}.$$

Ist  $s': G'' \rightarrow G$  ein anderer Schnitt, so ist  $a = s's^{-1}: G'' \rightarrow G' \triangleleft G$ . Damit ist

$$\begin{aligned} (f_{E,s'} - f_{E,s})(g_1'', g_2'') &= a(g_1'')s(g_1'')a(g_2'')s(g_2'')s(g_1''g_2'')^{-1}a(g_1''g_2'')^{-1}s(g_1''g_2'')s(g_2'')^{-1}s(g_1'')^{-1} \\ &= a(g_1'')s(g_1'')a(g_2'')s(g_2'')^{-1}a(g_1''g_2'')^{-1} \\ &= a(g_1'') - a(g_1''g_2'') + g_1'' \cdot a(g_2'') =: (da)(g_1'', g_2''). \end{aligned}$$

Äquivalente Erweiterung ergeben dieselben  $f$ -Funktionen.

Umgekehrt sei eine beliebige Funktion  $f: G'' \times G'' \rightarrow G'$  gegeben. Definiere eine Gruppenstruktur  $G_f$  auf  $G' \times G''$  durch

$$(g_1', g_1'')(g_2', g_2'') = (g_1' + g_1'' \cdot g_2' + f(g_1'', g_2''), g_1''g_2'').$$

Die Projektion  $G_f \rightarrow G''$  ergibt eine kurze exakte Sequenz  $E_f: 1 \rightarrow G' \rightarrow G_f \rightarrow G'' \rightarrow 1$ . Es gibt stets Inverse in  $G_f$ ; Assoziativität der Multiplikation ist dagegen nicht automatisch:

$$\begin{aligned} [(g_1', g_1'')(g_2', g_2'')](g_3', g_3'') &= (g_1' + g_1'' \cdot g_2' + f(g_1'', g_2''), g_1''g_2'')(g_3', g_3'') \\ &= (g_1' + g_1'' \cdot g_2' + f(g_1'', g_2'') + (g_1''g_2'') \cdot g_3' + f(g_1''g_2'', g_3''), g_1''g_2''g_3''). \end{aligned}$$

#### 4 Gruppenhomologie und -kohomologie

$$\begin{aligned} (g'_1, g''_1)[(g'_2, g''_2)(g_3, g''_3)] &= (g'_1, g''_1)(g'_2 + g''_2 \cdot g'_3 + f(g''_2, g''_3), g''_2 g''_3) \\ &= (g'_1 + g''_1 \cdot (g'_2 + g''_2 \cdot g'_3 + f(g''_2, g''_3)) + f(g''_1, g''_2 g''_3), g''_1 g''_2 g''_3) \end{aligned}$$

Die Differenz ist:

$$g''_1 f(g''_2, g''_3) - f(g''_1 g''_2, g''_3) + f(g''_1, g''_2 g''_3) - f(g''_1, g''_2) =: (df)(g''_1, g''_2, g''_3).$$

Also definiert  $f$  genau dann eine Gruppenstruktur, wenn  $df = 0$ . Ist  $f = f_{E,s}$ , so ist  $E_f$  äquivalent zu  $E$ , und somit erhalten wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Erweiterungen von } G'' \text{ durch } G' \\ \text{modulo Äquivalenz} \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{Funktionen } f: G'' \times G'' \rightarrow G' \text{ mit } df = 0 \\ \text{modulo Funktionen } da \text{ für } a: G'' \rightarrow G' \end{array} \right\}.$$

Die rechte Seite ist genau  $H^2(G'', G')$ , wenn man die Bar-Auflösung zur Berechnung verwendet.  $\square$

### 4.3 Exkurs: Adjungierte Funktoren

**Definition.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  beliebige Kategorien und  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  Funktoren. Dann heißt  $F$  linksadjungiert zu  $G$  und  $G$  rechtsadjungiert zu  $F$ , falls es einen natürlichen Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \quad (4.3.1)$$

gibt.

Aus der Definition folgt, dass es insbesondere Isomorphismen

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(d), G(d)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(d)), d) \text{ und } \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), F(c)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(F(c)))$$

gibt. Die Bilder der Identität auf  $G(d)$  bzw.  $F(c)$  sind damit natürliche Transformationen  $\epsilon: F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  und  $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ .

**Definition.** Seien  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} : G$  adjungierte Funktoren zwischen zwei Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$ . (Dabei soll  $F$  links- und  $G$  rechtsadjungiert sein.) Dann heißen  $F$  und  $G$  Äquivalenzen von Kategorien, falls  $\epsilon$  und  $\eta$  natürliche Isomorphismen sind.

Um den Adjunktionsisomorphismus (4.3.1) anzugeben, genügt es, die Transformationen  $\epsilon$  und  $\eta$  zu spezifizieren; denn damit erhält man die Adjunktionsisomorphismen durch

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), F(G(d))) \xrightarrow{\epsilon_*} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d)$$

mit Inversem

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(F(c)), G(d)) \xrightarrow{\eta^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d)).$$

**Lemma 4.3.2.** Hat ein Funktor  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  einen Linksadjungierten, so ist dieser bis auf natürlichen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Ebenso sind natürlich auch Rechtsadjungierte in der gleichen Weise eindeutig, wenn sie existieren. Der Beweis dieses Lemmas ist eine Anwendung eines berühmten, wenn auch einfachen, Resultats der Kategorientheorie:

**Lemma 4.3.3** (Yoneda-Lemma). *Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  ein Funktor,  $c \in \mathcal{C}$  ein Objekt und  $y_c: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  der Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, -)$ . Dann bilden die natürlichen Transformationen  $\text{Hom}(y_c, F)$  eine Menge, und die Abbildung*

$$\text{Hom}(y_c, F) \xrightarrow[\text{auf } c]{\text{anwenden}} \text{Hom}_{\text{Set}}(y_c(y), F(c)) = \text{Hom}_{\text{Set}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c), F(c)) \xrightarrow[\text{von } \text{id}_c]{\text{einsetzen}} F(c)$$

ist eine Bijektion.

*Beweis.* Ist  $N: y_c \rightsquigarrow F$  eine natürliche Transformation, so kommutiert nach Definition für jeden Morphismus  $f: c \rightarrow c'$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} y_c(c) & \xrightarrow{y_c(f)} & y_c(c') \\ N(c) \downarrow & & \downarrow N(c') \\ F(c) & \xrightarrow{F(f)} & F(c'). \end{array}$$

Indem wir das Bild von  $\text{id}_c \in y_c(c)$  durch das Diagramm verfolgen, sehen wir, dass  $N(c')(f) = F(f)(N(c)(\text{id}_c))$ ; somit hängt  $N$  also einzig von  $N(c)(\text{id}_c)$  ab, womit die Injektivität der Yoneda-Abbildung gezeigt ist. Umgekehrt liefert jedes  $x \in F(c)$  eine natürliche Transformation  $N_x$  durch  $N_x(f) = F(f)(x)$  für  $f: c \rightarrow c'$ .  $\square$

*Beweis von Lemma 4.3.2.* Seien  $F, F': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Linksadjungierte zu  $G$ . Dann gilt für alle Objekte  $c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}$ :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(c), d) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(c, G(d)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F'(c), d)$$

Wir erhalten also einen natürlichen Isomorphismus  $y_{F(c)} \rightsquigarrow y_{F'(c)}$ , der nach dem Yoneda-Lemma von einem (Iso-)Morphismus  $F'(c) \rightarrow F(c)$  induziert sein muss.  $\square$

**Beispiel 4.3.4.** Ist  $R \rightarrow S$  ein Ringmorphismus, so ordnet der Vergissfunktor

$$U: \text{Mod}_S \rightarrow \text{Mod}_R$$

einem  $S$ -Modul den zu Grunde liegenden  $R$ -Modul zu. Er hat einen Linksadjungierten, nämlich den Funktor  $F: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Mod}_S$  mit  $F(M) = S \otimes_R M$ . Denn es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(M, U(N)) &\cong \text{Hom}_S(S \otimes_R M, N) && \text{für } M \in \text{Mod}_R, N \in \text{Mod}_S. \\ f &\mapsto (s \otimes m \mapsto sf(m)) \\ (m \mapsto g(1_S \otimes m)) &\leftarrow g \end{aligned}$$

#### 4 Gruppenhomologie und -kohomologie

Der Funktor  $U$  hat aber auch einen Rechtsadjungierten, nämlich  $G: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Mod}_S$  mit  $G(M) = \text{Hom}_R(S, M)$ . Denn es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(U(N), M) &\cong \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M)) \quad \text{für } M \in \text{Mod}_R, N \in \text{Mod}_S. \\ f &\mapsto (n \mapsto (s \mapsto f(sn))) \\ (n \mapsto g(n)(1_S)) &\leftarrow g \end{aligned}$$

**Beispiel 4.3.5.** Ein ähnlich gelagertes Beispiel ist der Vergissfunktor  $U: \text{Gr} \rightarrow \text{Set}$ , der einer Gruppe die zu Grunde liegende Menge zuordnet. Hier gibt es ebenfalls einen Linksadjungierten, nämlich den Funktor  $F$ , der einer Menge die von ihr erzeugte freie Gruppe zuordnet.

**Beispiel 4.3.6.** Der Inklusionsfunktor  $I: \text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$  der abelschen Gruppen in alle Gruppen hat einen Linksadjungierten, nämlich  $(-)\text{ab}: \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$ , der einer Gruppe ihre Abelisierung zuordnet. Denn:

$$\text{Hom}_{\text{Grp}}(G, I(A)) \cong \text{Hom}_{\text{Ab}}(G_{\text{ab}}, A).$$

Hat ein Funktor Adjungierte, so hat er viele gute Eigenschaften, und oft kann man ihn studieren, indem man die (manchmal einfacheren) adjungierten Funktoren studiert.

**Lemma 4.3.7.** Sei  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor, der einen Linksadjungierten  $G$  besitzt. Dann vertauscht  $F$  mit Produkten und  $G$  mit Koprodukten.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}\left(d, F\left(\prod_i c_i\right)\right) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(G(d), \prod_i c_i\right) \cong \prod_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(d), c_i) \\ &\cong \prod_i \text{Hom}_{\mathcal{D}}(d, F(c_i)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}\left(d, \prod_i F(c_i)\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $F(\prod_i c_i) \cong \prod_i F(c_i)$  gilt. Analog geht der Beweis für Koprodukte.  $\square$

### Übungen

**4.3.8.** Bestimme die folgenden adjungierten Funktoren:

1. den Rechtsadjungierten zu dem Funktor  $X \times -: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ , der  $Y$  auf  $X \times Y$  abbildet;
2. den Linksadjungierten zu dem Funktor  $U: \text{Alg} \rightarrow \text{Mon}$ , der einem Ring das zu Grunde liegende *multiplikative* Monoid zuordnet.
3. den Linksadjungierten zu dem Vergissfunktor  $\mathcal{C} \downarrow c_0 \rightarrow \mathcal{C}$  von der Kategorie der Objekte über  $c_0 \in \mathcal{C}$  (einer beliebigen Kategorie mit endlichen Produkten) nach  $\mathcal{C}$  selbst.

4.3.9. Sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie. Bestimme links- und rechtsadjungierte Funktoren zu folgenden Funktoren, falls sie existieren:

1. der Funktor  $\epsilon_n: \text{Ch}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ , der einem Kettenkomplex  $C_{\bullet}$  den Eintrag  $C_n$  zuordnet;
2. der Funktor  $H_n: \text{Ch}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ ;
3. der Funktor  $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \{\mathbf{Z}\text{-graduierte Sequenzen in } \mathcal{C}\}$ , der einem Objekt  $c \in \mathcal{C}$  die Sequenz  $\cdots \rightarrow c \xrightarrow{\text{id}} c \rightarrow \cdots$  zuordnet. (Nimm vereinfachend an, dass  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit abzählbaren Produkten und Koprodukten ist.)

4.3.10. Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  zwei abelsche Kategorien und  $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$  adjungierte Funktoren zwischen ihnen. Zeige, dass  $F$  linksexakt und  $G$  rechtsexakt ist.

4.3.11. Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Eine *Komonade* (auch *Kotripel* genannt) ist ein Endofunktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  zusammen mit natürlichen Transformationen  $\epsilon: F \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  und  $\Delta: F \rightarrow F \circ F$ , so dass die folgenden Diagramm kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{\Delta} & F(F(X)) \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow F \circ \Delta \\
 F(F(X)) & \xrightarrow{\Delta \circ F} & F(F(F(X)))
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & & F(X) & & \\
 & \swarrow & \downarrow \Delta & \searrow & \\
 F(X) & \xleftarrow{F \circ \epsilon} & F(F(X)) & \xrightarrow{F \circ \epsilon} & F(X)
 \end{array}$$

(Es ist also ein Ringobjekt in der Kategorie der Endofunktoren.)

Sind  $f: \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C} : g$  adjungierte Funktoren ( $f$  ist linksadjungiert), dann zeige, dass  $F = f \circ g$  eine Komonade ist.

Betrachten wir das Objekt  $F^n(X) = F(\cdots F(X) \cdots)$ . Dann gibt es  $n + 1$  natürliche Transformationen  $d_i: F^{n+1}(X) \rightarrow F^n(X)$ , nämlich  $d_i = \text{id}^i \circ \epsilon \circ \text{id}^{n-i}$ .

Nun sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie, und  $C_n(X) = F^{n+1}(X)$ . Definiere  $d: C_n \rightarrow C_{n-1}$  durch  $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ . Zeige (analog zur Bar-Konstruktion), dass  $C_{\bullet}(X) \rightarrow X$  ein Kettenkomplex ist, der exakt ist, wenn  $\epsilon: FX \rightarrow X$  einen Schnitt hat.

## 4.4 Induktion und Transfer

Sei  $H \rightarrow G$  ein Gruppenmorphismus. Dann gibt es einen Vergissfunktoren

$$\text{Res}_H^G: \text{Mod}_G \rightarrow \text{Mod}_H,$$

der, wie in Beispiel 4.3.4 im vorigen Abschnitt gesehen, sowohl einen Rechtsadjungierten

$$\text{Coind}_H^G: \text{Mod}_H \rightarrow \text{Mod}_G$$

als auch einen Linksadjungierten

$$\text{Ind}_H^G: \text{Mod}_H \rightarrow \text{Mod}_G$$

besitzt.

#### 4 Gruppenhomologie und -kohomologie

**Lemma 4.4.1** (Shapiro). Sei  $M$  ein  $H$ -Modul. Dann gibt es Isomorphismen

$$H_*(H; M) \cong H_*(G; \text{Ind}_H^G M) \quad \text{und} \quad H^*(H; M) \cong H^*(G, \text{Coind}_H^G M).$$

*Beweis.* Die Gruppen  $H_*(H; M)$  sind die abgeleiteten Funktoren von  $X \mapsto X \otimes_{\mathbf{Z}[H]} M$ , ausgewertet auf  $X = \mathbf{Z}$ . Die Gruppen  $H_*(G; \text{Ind}_H^G M)$  dagegen sind die abgeleiteten Funktoren von  $X \mapsto X \otimes_{\mathbf{Z}[G]} (\mathbf{Z}[G] \otimes_{\mathbf{Z}[H]} M)$ , also von einem isomorphen Funktor. Ein ähnliches Argument zeigt den zweiten Teil.  $\square$

Shapiros Lemma zeigt insbesondere, dass Moduln von der Form  $\mathbf{Z}[G] \otimes_{\mathbf{Z}} A$  stets azyklisch sind, d. h.  $H_*(G, \mathbf{Z}[G] \otimes_{\mathbf{Z}} A) = 0$  für  $* > 0$ .

**Lemma 4.4.2.** Sei  $H < G$  eine Untergruppe von endlichem Index. Dann ist  $\text{Ind}_H^G \cong \text{Coind}_H^G$ .

*Beweis.* Der Isomorphismus ist gegeben durch die  $\mathbf{Z}[H]$ -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \phi: M &\rightarrow \text{Hom}_H(\mathbf{Z}[G], M) \\ m &\mapsto \left( g \mapsto \begin{cases} g \cdot m; & g \in H \\ 0; & g \notin H \end{cases} \right) \end{aligned}$$

Als abelsche Gruppe lässt sich die Induktion explizit schreiben als

$$\text{Ind}_H^G M \cong \bigoplus_{g \in G/H} M,$$

wohingegen die Koinduktion gegeben ist durch

$$\text{Coind}_H^G M \cong \prod_{g \in G/H} M.$$

Ist nämlich  $T \subseteq G$  eine Transversale von  $H$  in  $G$ , d. h.  $TH = G$  und  $|T| = [G : H]$ , so lässt sich jedes Element  $x \in \text{Ind}_H^G M$  eindeutig schreiben als  $x = \sum_{g \in T} g \otimes x_g$  mit  $x_g \in M$ , womit man den ersten Isomorphismus erhält. Ähnlich lässt sich jedes Element in  $f \in \text{Coind}_H^G M$  eindeutig schreiben als  $f = \prod_{g \in T} \chi_{g, f(g)}$ , wobei  $\chi_{g, m}: T \rightarrow M$  definiert ist durch  $\chi_{g, m}(g^{-1}) = m$  und  $\chi_g(g') = 0$  für  $g' \neq g$ . Die oben angegebene Abbildung ist die Standardinklusion der direkten Summe in das direkte Produkt, also ein Isomorphismus, solange  $[G : H]$  endlich ist.  $\square$

**Definition.** Sei  $i: H \rightarrow G$  eine Untergruppe von endlichem Index und  $M$  ein  $G$ -Modul. Definiere die *Transferabbildung*

$$i^!: H_*(G; M) \rightarrow H_*(H; M)$$

durch Anwendung von  $H_*(G; -)$  auf

$$M \xrightarrow{\eta} \text{Coind}_H^G \text{Res}_H^G M \cong \text{Ind}_H^G \text{Res}_H^G M$$

und Shapiros Lemma. Ebenso erhält man eine Transferabbildung

$$i_! : H^*(H; M) \rightarrow H^*(G; M)$$

durch Anwendung von  $H^*(G; -)$  auf

$$\text{Coind}_H^G \text{Res}_H^G M \cong \text{Ind}_H^G \text{Res}_H^G M \xrightarrow{\epsilon} M.$$

**Proposition 4.4.3.** *Die Kompositionen*

$$i_* \circ i^! : H_*(G; M) \rightarrow H_*(G; M) \quad \text{und} \quad i_! \circ i^* : H^*(G; M) \rightarrow H^*(G; M)$$

sind Multiplikationen mit  $[G : H]$ .

*Beweis.* Betrachte die Abbildung

$$M \xrightarrow{\eta} \text{Coind}_H^G \text{Res}_H^G M \cong \text{Ind}_H^G \text{Res}_H^G M \xrightarrow{\epsilon} M. \quad (4.4.4)$$

Nach der Definition des Transfers induziert dieser Morphismus die Komposition  $i_* \circ i^!$ . Es genügt also zu zeigen, dass (4.4.4) Multiplikation mit  $[G : H]$  ist, denn diese lässt sich ebenfalls als Multiplikation mit  $[G : H]$  als Kettenabbildung auf den Auflösungen fortsetzen. Unter (4.4.4) wird ein Element  $m \in M$  wie folgt abgebildet:

$$m \mapsto \prod_{g \in T} \chi_{g,m} \mapsto \bigoplus_{g \in T} g \otimes m \mapsto \sum_{g \in T} m = [G : H]m.$$

Dasselbe Argument funktioniert für Kohomologie. □

**Korollar 4.4.5.** *Sei  $i : H \hookrightarrow G$  eine Untergruppe vom Index  $n$ . Ist  $M$  ein  $G$ -Modul, so dass  $n$  in  $M$  invertierbar ist, dann ist  $H_*(G; M)$  ein direkter Summand von  $H_*(H; M)$ .*

*Beweis.* Wir haben einen Isomorphismus  $H_*(G; M) \xrightarrow{i^!} H_*(H; M) \xrightarrow{i_*} H_*(G; M)$ , da die Komposition Multiplikation mit einer Einheit ist. □

**Korollar 4.4.6.** *Sei  $G$  eine endliche Gruppe der Ordnung  $n$  und  $p$  eine Primzahl, so dass  $p \nmid n$ . Dann ist*

$$H_*(G; \mathbf{Z}_{(p)}) = H_*(G; \mathbf{Z}_p) = H_*(G; \mathbf{Z}/p) = 0.$$

*Beweis.* In allen drei Koeffizientengruppen ist  $n$  invertierbar. □

**Lemma 4.4.7.** *Sei  $i : H \hookrightarrow G$  eine Untergruppe endlichen Indexes und  $M$  ein  $G$ -Modul. Dann ist die Abbildung*

$$i^! : H_0(G; M) = M_G \rightarrow H_0(H; M) = M_H$$

gegeben durch

$$i^![m] = \sum_{g \in G/H} [gm] \quad \text{für } m \in M_G.$$

#### 4 Gruppenhomologie und -kohomologie

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass das angegebene  $i^!$  wohldefiniert ist. Die Klasse  $[gm]$  hängt nicht von dem gewählten Repräsentanten  $g$  von  $G/H$  ab, denn ist  $g \in H$ , so ist  $[gm] = [m] \in M_H$ . Um die Unabhängigkeit vom Repräsentanten  $m$  von  $[m]$  zu zeigen, sei  $gm$  ein anderer Repräsentant von  $m$  in  $M_G$ . Wähle eine Transversale  $T$  von  $G/H$ . Dann ist auch  $gT$  eine Transversale, und es gilt

$$\{t(gm) \mid t \in T\} = \{tm \mid t \in gT\}.$$

Die Summen stimmen also überein; da sie unabhängig von der Transversalen sind, ist  $i^![m]$  wohldefiniert. Dass die beiden Abbildungen übereinstimmen, folgt aus der Definition des Transfers: auf der Ebene der Moduln ist

$$M \rightarrow \text{Coind}_H^G \text{Res}_H^G M \rightarrow \text{Ind}_H^G \text{Res}_H^G M \cong \bigoplus_{g \in G/H} M$$

gegeben durch  $m \mapsto \sum_{g \in G/H} g \otimes_H M$ , wodurch sich nach Anwenden der  $G$ -Koinvarianten die angegebene Formel ergibt.  $\square$

In Korollar 4.4.5 wird verschwiegen, wie wir den Summanden von  $H_*(H)$  bestimmen können, der isomorph zu  $H_*(G)$  ist. Um dies zu formulieren, brauchen wir zunächst eine wichtige Formel.

**Satz 4.4.8** (Die Doppelnebenklassenformel). *Seien  $H < G$ ,  $K < G$  Untergruppen von endlichem Index,  $M$  ein  $G$ -Modul und  $T \subseteq G$  ein Repräsentantensystem für die Doppelnebenklassen  $K \backslash G/H$ , d. h. jedes Element von  $G$  liegt in  $KgH$  für genau ein  $g \in T$ . Ist  $i: L \rightarrow G$  eine beliebige Untergruppe von endlichem Index, so bezeichne  $i_*$  mit  $\text{Ind}_L^G: H_*(L; M) \rightarrow H_*(G; M)$  und  $i^!$  mit  $\text{tr}_L^G: H_*(G; M) \rightarrow H_*(L; M)$ . Dann gilt für  $x \in H_*(H; M)$ :*

$$\text{tr}_K^G \text{Ind}_H^G x = \sum_{g \in T} \text{Ind}_{K \cap H^g}^K \text{tr}_{K \cap H^g}^{H^g} gx \in H_*(K; M),$$

wobei  $H^g$  für die konjugierte Untergruppe  $gHg^{-1} < G$  steht.

*Beweis.* Es genügt, die Formel für  $H_0$  zu zeigen, denn dann folgt sie in allen Dimensionen durch Dimensionsverschiebung (vgl. Übung!). Die links Seite ist für  $x \in M_H$  damit gegeben durch  $\sum_{g \in G/K} gx$ , wogegen die rechte Seite gegeben ist durch

$$\sum_{g \in T} \sum_{h \in H^g / (K \cap H^g)} ghx.$$

Aber  $K \cap H^g = \{k \in K \mid kgH = gH\}$ , also laufen die Summen über die gleichen Indexmengen.  $\square$

**Satz 4.4.9.** *Sei  $i: P \hookrightarrow G$  die Inklusion einer  $p$ -Sylow-Untergruppe in eine endliche Gruppe, und sei  $M$  ein  $\mathbf{Z}_{(p)}[G]$ -Modul. Dann operiert  $G$  auf  $H_*(P; M)$  durch Konjugation, und  $H_*(G; M)$  ist isomorph zu*

$$H_*(P; M)_G := H_*(P; M) / (\text{Ind}_{P \cap P^g}^P x - g \text{Ind}_{P \cap P^g}^{P^g} x \mid x \in H_*(P \cap P^g; M), g \in G).$$

**Bemerkung 4.4.10.** Da  $G$  im Allgemeinen nicht auf  $P$  durch Konjugation operiert, ist die Definition von  $H_*(P; M)_G$  eine echte Verallgemeinerung der Koinvarianten. Falls  $P$  ein Normalteiler ist, so ist  $P \cap P^g = P$ , und die Gruppe der Relationen vereinfacht sich zu  $(x - gx)$ , die Gewöhnlichen Koinvarianten für  $G$  (oder  $G/P$ ). Die Formel vereinfacht sich auch leicht, wenn  $P$  die folgende Eigenschaft hat: Für alle  $g \in G$  ist entweder  $P^g = P$  oder  $P^g \cap P = \{1\}$ . In diesem Fall ist die Gruppe der Relationen erzeugt von

$$(x - gx) \quad \text{für } g \in N_G(P) = \{g \in G \mid P^g = P\},$$

also ist  $H_*(P, M)_G \cong H_*(P, M)_{N_G(P)} = H_*(P, M)_{W_G(P)}$ , letzteres verstanden im herkömmlichen Sinn. Hierbei ist  $W_G(P) = N_G(P)/P$  und wird Weylgruppe von  $P$  in  $G$  genannt.

*Beweis.* Wir verwenden die Doppelnebenklassenformel für  $K = H$ . Sei  $x \in H_*(P; M)$ . Dann gilt in  $H_*(P; M)_G$ :

$$\begin{aligned} i^! i_* x &= \sum_{g \in P \backslash G/P} \text{Ind}_{P \cap P^g}^P \text{tr}_{P \cap P^g}^{P^g} g x &= \sum_{g \in P \backslash G/P} g \text{Ind}_{P \cap P^g}^{P^g} \text{tr}_{P \cap P^g}^P x \\ & & \stackrel{4.4.3}{=} \sum_{g \in P \backslash G/P} [P : P \cap P^g] x = [G : P] x \end{aligned}$$

Da  $p \nmid [G : P]$ , ist  $[G : P]$  invertierbar in  $M$ , also ist  $i^! : H_*(G; M) \rightarrow H_*(P; M)_G$  surjektiv. Die Injektivität wurde schon in Korollar 4.4.5 gezeigt.  $\square$

**Beispiel 4.4.11.** Wir berechnen mit Hilfe der Transferabbildung die Homologie der symmetrischen Gruppe  $\Sigma_3$  mit Koeffizienten in  $\mathbf{Z}_{(p)}$  für alle Primzahlen  $p$ . Da  $|\Sigma_3| = 6$ , ist  $H_*(\Sigma_3; \mathbf{Z}_{(p)}) = 0$  für  $p > 3$ . Sei  $p = 3$ . Dann haben wir eine Inklusion  $C_3 \cong A_3 \hookrightarrow \Sigma_3$ , und wir schließen aus dem letzten Satz, dass

$$H_i(\Sigma_3; \mathbf{Z}_{(3)}) = H_i(C_3; \mathbf{Z}_{(3)})_{\Sigma_3}$$

ist. Da  $C_3 \triangleleft \Sigma_3$  ein Normalteiler ist und  $C_3$  auf  $H_*(C_3; \mathbf{Z}_{(3)})$  trivial operiert (Satz 4.1.8), ist die rechte Seite gleich  $H_i(C_3; \mathbf{Z}_{(3)})_{C_2}$ , wobei  $C_2$  die beiden Nichteinselemente von  $C_3$  vertauscht. Wir müssen berechnen, wie die induzierte Operation auf der Homologie aussieht. Dazu betrachten wir die Standardauflösung  $P_\bullet \rightarrow \mathbf{Z}_{(3)}$  über

$$R = \mathbf{Z}_{(3)}[C_3] = \mathbf{Z}_{(3)}[t]/(t^3 - 1)$$

mit  $P_n = R$  und

$$d_i = \begin{cases} 1 - t; & i \text{ gerade} \\ 1 + t + t^2; & i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Bezeichne  $\phi$  den nichttrivialen Automorphismus von  $C_3$ . Ein Modulhomomorphismus  $f: R \rightarrow \phi^* R$  ist ein  $\mathbf{Z}_{(3)}$ -Homomorphismus, so dass  $\phi(g)f(m) = f(gm)$  für alle  $g \in C_3$ ,  $m \in R$  gilt. Somit ist  $f$  eindeutig bestimmt durch  $f(1)$ . Damit  $f_\bullet: C_\bullet \rightarrow \phi^* C_\bullet$  eine Hochhebung der Identität auf  $\mathbf{Z}_{(3)}$  ist, müssen für die  $a_n = f_n(1)$  folgende Relationen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} a_{i+1}(1 - t) &= (1 - t^2)a_i && (i \text{ gerade}); \\ a_{i+1}(1 + t + t^2) &= (1 + t + t^2)a_i && (i \text{ ungerade}). \end{aligned}$$

#### 4 Gruppenhomologie und -kohomologie

Eine mögliche Hochhebung ist also

$$a_0 = 1; \quad a_{2i-1} = a_{2i} = (1+t)^i.$$

Um den Effekt in der Homologie zu berechnen, setzen wir in dieser Formel  $t = 1$  und erhalten

$$H_{2i-1}(\Sigma_3; \mathbf{Z}_{(3)}) \cong (\mathbf{Z}/3)/(2^i - 1) \cong \begin{cases} 0; & i \text{ ungerade} \\ \mathbf{Z}/3; & i \text{ gerade.} \end{cases}$$

Für  $p = 2$  haben wir

$$H_i(\Sigma_3; \mathbf{Z}_{(2)}) = H_i(C_2; \mathbf{Z}_{(2)})_{\Sigma_3}.$$

Wir befinden uns hier in der Situation von Bemerkung 4.4.10; die drei Untergruppen der Ordnung 2 sind erzeugt von den Transpositionen (12), (13) und (23), und die Schnitte zweier solcher Untergruppen sind stets trivial. Die Weylgruppe  $W_{\Sigma_3}(C_2)$  einer solchen Untergruppe ist auch trivial, also gilt

$$H_i(\Sigma_3; \mathbf{Z}_{(2)}) = H_i(C_2; \mathbf{Z}_{(2)}).$$

Damit können wir die ganzzahlige Homologie von  $\Sigma_3$  angeben:

$$H_n(\Sigma_3; \mathbf{Z}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}; & n = 0 \\ \mathbf{Z}/2; & n \equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbf{Z}/6; & n \equiv 3 \pmod{4} \\ 0; & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 5 Multiplikative Strukturen

Die Komposition von zwei Morphismen bewirkt, dass man auch auf Ext-Gruppen eine externe Multiplikation definieren kann. Wenn das zweite Argument von Ext eine Multiplikation hat, so erhält man sogar eine innere Multiplikation und damit insbesondere eine Ringstruktur auf  $H^*(G; R)$  für jeden Ring  $R$ . Diese zusätzliche Struktur ist sehr wertvoll. Es gibt sie nur auf der Kohomologie; auf der Homologie hat man nur unter bestimmten Flachheitsbedingungen eine Komultiplikation. Wann immer Produkte von nichttrivialen Elementen verschwinden, kann man, im Gegensatz zu wohlbekanntem Multiplikationen z. B. in Gruppen oder allgemeinen Ringen, Produkte höherer Ordnung definieren, die sogenannten Massey-Produkte. Mit Hilfe der Produkte und Massey-Produkte lassen sich sehr kompakte Beschreibungen von Kohomologiegruppen bestimmen.

### 5.1 Kettenalgebren und -koalgebren

In diesem Abschnitt sei  $k$  ein kommutativer Grundring (man denke an  $k = \mathbf{Z}$  oder  $k = \mathbf{F}_p$ , den Körper mit  $p$  Elementen). Wir schreiben kurz  $\otimes$  für  $\otimes_k$  und  $\text{Hom}$  für  $\text{Hom}_k$ .

Außerdem sei  $R$  eine  $k$ -Bialgebra, das heißt eine  $k$ -Algebra  $R$ , die zugleich  $k$ -Koalgebra ist (vgl. Übung 2.2.7), so dass die Multiplikation  $\mu$  eine Koalgebrenabbildung und (äquivalent) die Komultiplikation  $\Delta$  eine Algebrenabbildung ist. Wir nehmen an, dass  $R$  als  $k$ -Modul flach ist.

Sind  $M, N$  zwei  $R$ -Moduln, so erhält  $M \otimes N$  eine kanonische  $R$ -Modulstruktur durch die Komultiplikation:

$$R \otimes (M \otimes N) \xrightarrow{\Delta \otimes \text{id}} R \otimes R \otimes M \otimes N \cong R \otimes M \otimes R \otimes N \xrightarrow{\mu \otimes \mu} M \otimes N. \quad (5.1.1)$$

Als Beispiele für solche  $k$ -Bialgebren denke man an  $R = k$  (die Multiplikation und Komultiplikation ist eindeutig bestimmt, denn  $k \otimes k \cong k$ ) oder an einen Gruppenring  $R = k[G]$ , wobei die Komultiplikation auf den Erzeugern  $[g]$  ( $g \in G$ ) gegeben ist durch  $\Delta[g] = [g] \otimes [g]$ .

Im Folgenden wird es manchmal wichtig sein,  $k$ -Algebren zu betrachten, die gleichzeitig  $R$ -Moduln sind, allerdings keine  $R$ -Algebren – letzteres würde ja insbesondere implizieren, dass  $R$  kommutativ wäre. Denkt man an  $R = k$ , so verschwindet dieser feine Unterschied jedoch.

**Definition.** Eine  $R$ -Modulalgebra über  $k$  ist ein  $R$ -Modul  $A$ , der zugleich eine  $k$ -Algebra ist, so dass die Multiplikation  $\mu: A \otimes A \rightarrow A$  ein  $R$ -Modulmorphismus ist. Hierbei trägt  $A \otimes A$  die durch (5.1.1) beschriebene  $R$ -Modulstruktur.

Dual ist das Konzept der  $R$ -Modulkoalgebra, wo gefordert wird, dass die Komultiplikation  $\Delta$   $R$ -linear ist.

## 5 Multiplikative Strukturen

**Definition.** Eine  $R$ -Modul-Kettenalgebra ist ein  $R$ -Kettenkomplex  $(C_\bullet, d)$  mit der Struktur einer  $R$ -Modulalgebra, bezüglich derer  $d$  eine Derivation ist, d. h.

$$d(xy) = d(x)y + (-1)^{|x|}xd(y).$$

Die Kettenalgebra  $C_\bullet$  heißt (graduiert) kommutativ, falls

$$xy = (-1)^{|x||y|}yx$$

gilt. Ein Morphismus von Kettenalgebren ist ein Morphismus von  $R$ -Kettenkomplexen, der zugleich ein Morphismus von  $k$ -Algebren ist.

Die Vorzeichenkonvention (3.5.6) ist hier strikt in Kraft.

Traditionell werden Kettenalgebren auch *differenzielle graduierte  $k$ -Algebren (dga)* genannt.

**Lemma 5.1.2.** Ist  $C_\bullet$  eine  $R$ -Modul-Kettenalgebra, so ist  $H_*(C_\bullet)$  ebenfalls eine graduierte  $R$ -Modulalgebra. Ist  $C_\bullet$  kommutativ, so auch  $H_*(C_\bullet)$ .

*Beweis.* Es ist nur zu zeigen, dass das Produkt  $[x] \cdot [y] = [xy]$  auf Homologieklassen wohldefiniert ist. Zunächst zeigen wir, dass  $xy$  ein Zykel ist, wenn  $x$  und  $y$  Zykel sind:

$$d(xy) = d(x)y \pm xd(y) = 0.$$

Ist  $x = d\bar{x}$  ein Rand und  $y$  ein Zykel, so ist

$$d(\bar{x}y) = d(\bar{x})y \pm \bar{x}d(y) = xy,$$

also ist  $xy$  ein Rand – umgekehrt ist  $xy$  natürlich auch Rand, wenn  $x$  ein Zykel und  $y$  ein Rand ist.

Die Aussage über die Kommutativität ist offensichtlich. □

**Beispiel 5.1.3.** Das folgende Beispiel zeigt, dass es nichtkommutative Kettenalgebren mit kommutativer Homologie gibt. Dazu sei  $R = k$ ,  $C_\bullet = k[x]$ , wobei  $|x| = 1$ , und  $d(x) = 1$ . Diese zunächst recht kommutativ aussehende Kettenalgebra ist es in der Tat nicht, denn graduierte Kommutativität würde bedeuten, dass

$$x \cdot x = (-1)^{|x||x|}x \cdot x = -x \cdot x$$

gilt, was falsch ist, wenn  $2 \neq 0$  in  $k$ . Es gilt

$$d(x^n) = d(x)x^{n-1} + (-1)^{|x|}xd(x^{n-1}) = x^{n-1} - xd(x^{n-1}),$$

somit induktiv  $d(x^{2n}) = 0$  und  $d(x^{2n+1}) = x^{2n}$ . Also ist  $H_*(C_\bullet) = 0$ , eine kommutative Algebra.

## 5.1 Kettenalgebren und -koalgebren

**Beispiel 5.1.4.** Sei  $V$  ein  $R$ -Kettenkomplex. Dann gibt es eine freie  $R$ -Modul-Kettenalgebra über  $V$ , d.h. eine  $R$ -Modulalgebra  $V \rightarrow T(V)$ , so dass es für jede andere  $R$ -Modul-Kettenalgebra  $A$  einen Adjunktionsisomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-Modul-Kettenalgebren}}(T(V), A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}_R}(V, A)$$

gibt. Diese Algebra ist die *graduierete Tensoralgebra*

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes_k n},$$

auf der das Differential die eindeutige Fortsetzung von  $d$  als Derivation ist, und wobei  $V^{\otimes_k n} = V \otimes_k \cdots \otimes_k V$ .

Ebenso gibt es eine freie *graduierete kommutative*  $R$ -Modulalgebra  $\mathrm{Sym}(V)$  über  $V$ , die wie im ungraduiereten Fall eine Quotientenalgebra von  $T(V)$  ist:

$$\mathrm{Sym}(V) = T(V) / (v \otimes w - (-1)^{|v| \cdot |w|} w \otimes v).$$

Die Algebra  $\mathrm{Sym}(V)$  heißt *graduierete-symmetrische Algebra* und hat die universelle Eigenschaft, dass für jede andere graduierete kommutative  $R$ -Modulalgebra  $A$

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-Modulalgebren}}(\mathrm{Sym}(V), A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_R}(V, A)$$

gilt. Wir überprüfen, dass das Differential von  $T(V)$  zu einem wohldefinierten Differential auf absteigt:

$$\begin{aligned} d(x \otimes y - (-1)^{|x| \cdot |y|} y \otimes x) &= dx \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes dy \\ &\quad - (-1)^{|x| \cdot |y|} dy \otimes x - (-1)^{|x| \cdot |y| + |y|} y \otimes dx \\ &= dx \otimes y - (-1)^{(|x|-1)|y|} y \otimes dx \\ &\quad + (-1)^{|x|} (x \otimes dy - (-1)^{|x|(|y|-1)} dy \otimes x). \end{aligned}$$

Da  $|dx| = |x| - 1$ , bildet  $d$  also das von den graduiereten Kommutatoren erzeugte Ideal in sich ab.

**Definition.** Eine  $R$ -Modul-Kettenkoalgebra (auch *differenzielle graduierete Koalgebra*, *dgca*)  $C_\bullet$  über  $R$  ist der duale Begriff, d. h. es gibt eine  $R$ -lineare Komultiplikation auf dem  $R$ -Kettenkomplex  $C_\bullet$ ,

$$\Delta: C_n \rightarrow \prod_{i+j=n} C_i \otimes C_j = \mathrm{Tot}_n(C_\bullet \otimes C_\bullet)$$

und eine Koeins  $C_0 \rightarrow k$ , so dass  $C_\bullet$  zu einer Koalgebra wird, und so dass  $d$  eine *Koderivation* ist: ist  $\Delta(x) = \sum_i x'_i \otimes x''_i$ , so ist

$$\Delta(dx) = \sum_i d(x'_i) \otimes x''_i + (-1)^{|x'_i|} x'_i \otimes d(x''_i).$$

### 5.1.1 Multiplikative und komultiplikative Auflösungen

Von hier an sei zusätzlich  $A$  eine  $R$ -Modulalgebra und  $C$  eine  $R$ -Modulkoalgebra. Wir nehmen an, dass  $A$  und  $C$  als  $k$ -Moduln flach sind.

Um nicht den Überblick zu verlieren, kann man das Beispiel  $A = C = k$  betrachten.

**Definition.** Eine *multiplikative projektive Auflö-*sung von  $A$  über  $R$  ist eine projektive Auflö-sung  $P_\bullet \rightarrow A$  von  $R$ -Moduln, so dass  $P_\bullet$  eine  $R$ -Modul-Kettenalgebra ist und  $P_0 \rightarrow A$  ein Algebren- und  $R$ -Modulmorphismus. Analog sind *multiplikative injektive Auflö-*sungen sowie, für  $R$ -Koalgebren, *komultiplikative projektive und injektive Auflö-*sungen definiert.

**Lemma 5.1.5.** *Jede  $R$ -Modulkoalgebra  $C$  hat eine komultiplikative Auflö-*sung. Ist  $R$  kommutativ und  $C$  eine kommutative  $R$ -Bialgebra, so gibt es eine projektive kommutative Bialgebra-Auflö-sung von  $C$  über  $R$ .

Sei  $P_\bullet \rightarrow C$  eine beliebige projektive Auflö-sung. Dann ist  $|P_\bullet \otimes P_\bullet| \rightarrow C \otimes C$  ebenfalls eine projektive Auflö-sung über  $R$ . Um dies zu sehen, betrachten wir die kurze exakte Sequenz von Doppelkomplexen

$$P_\bullet \otimes C[-1] \rightarrow P_\bullet \otimes \tilde{P}_\bullet \rightarrow P_\bullet \otimes P_\bullet.$$

Da  $P_i \otimes \tilde{P}_i$  exakt ist für alle  $i$ , ist  $H_*|P_\bullet \otimes \tilde{P}_\bullet| = 0$ , und die lange exakte Sequenz liefert:

$$H_*|P_\bullet \otimes P_\bullet| \cong H_*(P_\bullet \otimes C) \cong \text{Tor}_*^k(C, C) = C \otimes C,$$

konzentriert im Grad 0, wegen der Annahme, dass  $C$  als  $k$ -Modul flach ist.

Nach dem Fundamentallemma 3.3.1 kann die  $R$ -lineare Koproduktabbildung  $C \rightarrow C \otimes C$  bis auf Homotopie eindeutig und  $R$ -linear zu einer Abbildung  $P_\bullet \rightarrow |P_\bullet \otimes P_\bullet|$  fortgesetzt werden. Eine solche Kettenabbildung nennen wir *Diagonalapproximation*, da sie die „Diagonale“  $C \rightarrow C \otimes C$  auf Kettenniveau fortsetzt.

Wenn wir nun die Koassoziativität zeigen wollen, stellen wir fest, dass sie nur bis auf Kettenhomotopie gilt. Das ist oft völlig ausreichend, aber wir haben eben keine komultiplikative Auflö-sung. Deshalb folgt nun der eigentliche Beweis.

*Beweis.* Wir zeigen, dass die Bar-Auflö-sung  $B_\bullet(R, C)$  aus Abschnitt 4.1.2 das Gewünschte leistet. Wir befinden uns in einem leicht allgemeineren Kontext, denn wir haben einen Grundring  $k$  fixiert, während wir in Abschnitt 4.1.2 nur den Fall  $k = \mathbf{Z}$  betrachtet haben.

Da  $C$  und  $R$  flach als  $k$ -Moduln sind, ist die Bar-Auflö-sung flach – sind  $C$  und  $R$  sogar projektive  $k$ -Moduln, so ist  $B_\bullet(R, C)$  sogar projektiv. Wir definieren eine Komultiplikation

$$\Delta: B_n(R, C) = R^{n+1} \otimes C \rightarrow \prod_{i+j=n} (R^{i+1} \otimes C) \otimes (R^{j+1} \otimes C)$$

durch  $\Delta = \sum_{i=0}^n (-1)^i \Delta_i$  mit

$$\Delta_i(r_0 | \cdots | r_n | c) = \sum_k (r_0 | \cdots | r_i | c'_k) \otimes (r_0 \cdots r_i | \cdots | r_n | c''_k),$$

wobei  $\Delta(c) = \sum_k c'_k \otimes c''_k$  ist.

Die Koassoziativität folgt direkt aus der Koassoziativität von  $C$ , und die Koeins ist die Augmentation  $B_\bullet(R, C) \rightarrow C$ . Wir zeigen, dass  $d$  eine Koderivation ist. Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned} \Delta_i d_j(r_0 | \cdots | r_{n+1}) &= \Delta_i(r_0 | \cdots | r_j r_{j+1} | \cdots | r_{n+1}) \\ \text{falls } i < j &= \sum_k (r_0 | \cdots | r_i | r'_{n+1}) \otimes (r_0 \cdots r_i | r_{i+1} | \cdots | r_j r_{j+1} | \cdots | r_n | r''_{n+1}) \\ &= (1 \otimes d_{j-i}) \Delta_i(r_0 | \cdots | r_{n+1}) \\ \\ \text{falls } i \geq j &= \sum_k (r_0 | \cdots | r_j r_{j+1} | \cdots | r_i | r'_{n+1}) \otimes (r_0 \cdots r_{i+1} | \cdots | r_n | r''_{n+1}) \\ &= (d_j \otimes 1) \Delta_{i+1}(r_0 | \cdots | r_{n+1}), \end{aligned}$$

wobei  $\Delta(r_{n+1}) = \sum_k r'_{n+1} \otimes r''_{n+1}$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \Delta d &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^j \Delta_i d_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^j (1 \otimes d_{j-i}) \Delta_i + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^j (d_j \otimes 1) \Delta_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (-1)^j (1 \otimes d_{j-i}) \Delta_i + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i (-1)^j (d_j \otimes 1) \Delta_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} (-1)^i (-1)^j (1 \otimes d_j) \Delta_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (d_j \otimes 1) \Delta_i \\ &= (d \otimes 1 \pm 1 \otimes d) \Delta. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, dass  $C$  eine kommutative Bialgebra ist. Wir wollen ein kommutatives Produkt auf dem Bar-Komplex definieren.

**Definition.** Ein  $(p, q)$ -Shuffle ist eine Permutation  $\sigma \in \Sigma_{p+q}$ , für die

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{und} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$$

gilt. Die Menge der  $(p, q)$ -Shuffles bezeichnen wir mit  $S_{p,q}$ .

Es gibt also genau  $\binom{p+q}{p}$   $(p, q)$ -Shuffles. Definiere das *Shuffle-Produkt*  $*$ :  $B_p(R, C) \otimes B_q(R, C) \rightarrow B_{p+q}(R, C)$  durch

$$(r_0 | r_1 | \cdots | r_p | c) * (r'_0 | r_{p+1} | \cdots | r_{p+q} | c') = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} (\text{sign } \sigma) (r_0 r'_0 | r_{\sigma(1)} | \cdots | r_{\sigma(p+q)} | c c')$$

Die (graduierte) Kommutativität ist aus der Definition offensichtlich; es bleibt dem Leser überlassen, zu zeigen, dass  $*$  mit  $d$  und  $\Delta$  verträglich ist.  $\square$

**Beispiel 5.1.6.** Wir betrachten wiederum die Standardauflösung von  $C = \mathbf{Z}$  über  $\mathbf{Z}[G]$  für eine zyklische Gruppe  $G = C_n$ ; diese ist natürlich kleiner als die Bar-Auflösung, aber sie hat auch eine Diagonalapproximation, die wir nun definieren. Bezeichne mit  $x_i$  den Erzeuger im Grad  $i$  und schreibe, wie gewohnt,  $R = \mathbf{Z}[G] = \mathbf{Z}[t] / (t^n - 1)$ . Dann ist

$$\Delta(x_k) = \sum_{i+j=k} \Delta_{ij}(x_k) x_i \otimes x_j$$

## 5 Multiplikative Strukturen

mit

$$\Delta_{ij}(x_k) = \begin{cases} 1 \otimes 1; & \text{falls } i \text{ gerade ist;} \\ 1 \otimes t; & \text{falls } i \text{ ungerade und } j \text{ gerade ist;} \\ - \sum_{0 \leq \alpha < \beta < n} t^\alpha \otimes t^\beta; & \text{falls } i \text{ und } j \text{ ungerade sind.} \end{cases}$$

Um zu zeigen, dass dies eine Kettenabbildung ist, müssen wir zeigen:

$$(d_p \otimes 1) \circ \Delta_{p+1,q} + (1 \otimes d_q) \Delta_{p,q+1} = \Delta_{p,q} d_{p+q}. \quad (5.1.7)$$

Hierbei ist  $d_i$  das Standarddifferenzial:  $d_i = 1 - t$  für  $i$  gerade und  $d_i = N = 1 + \dots + t^{n-1}$  für  $i$  ungerade.

1.  $p$  gerade,  $q$  gerade. Dann ist (5.1.7):

$$(1 - t) \otimes t + 1 \otimes (1 - t) = (1 \otimes 1)(1 - t) = 1 \otimes 1 - t \otimes t.$$

2.  $p$  gerade,  $q$  ungerade. Dann haben wir:

$$- \sum_{0 \leq \alpha < \beta < n} ((1 - t)t^\alpha) \otimes t^\beta + 1 \otimes N = (1 \otimes 1)N = 1 \otimes 1 + t \otimes t + \dots + t^{n-1} \otimes t^{n-1}.$$

3.  $p$  ungerade,  $q$  gerade. Dann schreibt sich (5.1.7) als:

$$N \otimes 1 - \sum_{0 \leq \alpha < \beta < n} (t^\alpha \otimes (1 - t)t^\beta) = (1 \otimes t)N = 1 \otimes t + t \otimes t^2 + \dots + t^{n-1} \otimes 1.$$

4. Schließlich haben wir für  $p$  und  $q$  ungerade:

$$N \otimes 1 - 1 \otimes N = - \sum_{0 \leq \alpha < \beta < n} t^\alpha \otimes t^\beta + \sum_{0 \leq \alpha < \beta < n} t^{\alpha+1} \otimes t^{\beta+1}.$$

Ist  $n = 2$ , so prüft man nach, dass  $\Delta$  in der Tat koassoziativ ist, dass  $\Delta$  also die Standardauflösung zu einer komultiplikativen Auflösung macht; ist allerdings  $n > 2$ , so stimmt dies nicht mehr — man prüft nach, dass z. B.  $(1 \otimes \Delta)\Delta(x_2) \neq (\Delta \otimes 1)\Delta(x_2)$ .

Da  $\mathbf{Z}[G]$  kommutativ ist, macht es Sinn, auch nach einem kommutativen Produkt zu suchen. Sei  $\alpha_{ij} \in R$  zunächst unbestimmt. Dann können wir schreiben:

$$x_i * x_j = \alpha_{ij} x_{i+j}.$$

Aus der Kompatibilität mit dem Differenzial zusammen mit  $\alpha_{0i} = \alpha_{i0} = 1$  erhalten wir induktiv:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0; & i \text{ und } j \text{ ungerade} \\ \binom{i+j}{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor}; & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis:*

Wieder zerfällt der Beweis in vier Teile (bzw. drei, denn  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ), je nach Parität von  $i$  und  $j$ .

1. Seien  $i$  und  $j$  ungerade. Dann ist  $d(x_i * x_j) = \alpha_{ij} N x_{i+j-1}$  und

$$d(x_i) * x_j - x_i * d(x_j) = ((1-t)\alpha_{i-1,j} - (1-t)\alpha_{j,i-1}) x_{i+j-1} = 0,$$

also  $\alpha_{ij} = 0$ .

2. Sei  $i$  gerade und  $j$  ungerade. Dann ist  $d(x_i * x_j) = \alpha_{ij}(1-t)x_{i+j-1}$  und

$$d(x_i) * x_j + x_i * d(x_j) = N\alpha_{i-1,j}x_{i+j-1} + (1-t)\alpha_{i,j-1}x_{i+j-1} = (1-t)\alpha_{i,j-1}x_{i+j-1},$$

also  $\alpha_{ij} = \alpha_{i,j-1}$ . Ebenso gilt  $\alpha_{ij} = \alpha_{i-1,j}$  für  $i$  ungerade und  $j$  gerade.

3. Seien  $i$  und  $j$  gerade. Dann ist  $d(x_i * x_j) = \alpha_{ij} N x_{i+j-1}$  und

$$d(x_i) * x_j + x_i * d(x_j) = (N\alpha_{i-1,j} + N\alpha_{j,i-1})x_{i+j-1},$$

also  $\alpha_{ij} = \alpha_{i-1,j} + \alpha_{i,j-1} = \binom{i+j}{\frac{i}{2}}$ .

Die Unteralgebra, die von den geraden Elementen erzeugt wird, heißt *dividierte Potenzalgebra* und wird meist mit  $\Gamma(x_2)$  bezeichnet. Eine interessante Beobachtung ist, dass  $\Gamma(x) \otimes \mathbf{Q} \cong \mathbf{Q}[x]$ ; dies gilt aber nie für Ringe, die keine  $\mathbf{Q}$ -Algebren sind. Insgesamt ist die Kettenalgebra also isomorph zu  $\wedge(x_1) \otimes \Gamma(x_2)$ , wobei  $\wedge(y)$  die *äußere Algebra* bezeichnet, d. h.  $\wedge(y) = \langle 1, y \mid y^2 = 0 \rangle$ .

Wir überlassen es dem Leser, nachzuprüfen, dass  $\Delta$  und  $*$  verträglich sind, d. h., dass  $\Delta$  ein Algebrenmorphismus ist.

### 5.1.2 Das Produkt auf Ext und das Koproduct auf Tor

Seien nun  $M, N$  zwei  $R$ -Moduln und  $k, R, C$  und  $A$  wie zuvor. Wir wählen eine kommutative projektive Auflösung  $P_\bullet$  von  $C$  über  $R$ . Wir haben nun ein *externes Produkt*

$$\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, M) \otimes \mathrm{Hom}(P_\bullet, N) \xrightarrow{\cup} \mathrm{Hom}_R(P_\bullet, M \otimes N),$$

wobei  $(f \cup g)(x) = (f \otimes g)(\Delta(x))$ . Die kanonische *Künneth-Abbildung*

$$|H_*(C_\bullet) \otimes H_*(D_\bullet)| \rightarrow H_*|C_\bullet \otimes D_\bullet|,$$

die  $[x] \otimes [y]$  nach  $[x \otimes y]$  schickt, ist eine Kettenabbildung; somit erhält man ein Produkt auf den Ext-Gruppen:

$$\mathrm{Ext}_R^m(C, M) \otimes \mathrm{Ext}_R^n(C, N) \rightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+m}(C, M \otimes N).$$

Ist  $M = N = A$ , so können wir mit der  $R$ -linearen Multiplikation  $A \otimes A \rightarrow A$  verknüpfen; somit erhält  $\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, A)$  die Struktur einer  $k$ -Kettenalgebra über  $k$ , und folglich wird  $\mathrm{Ext}_R^\bullet(C, A)$  zu einer graduierten  $k$ -Algebra.

**Satz 5.1.8.** *Das externe Produkt (und damit auch das interne) ist wohldefiniert, das heißt, es hängt nicht von der gewählten multiplikativen projektiven Auflösung ab. Es ist außerdem natürlich in allen Variablen.*

## 5 Multiplikative Strukturen

*Beweis.* Seien  $P_\bullet \rightarrow C$  und  $P'_\bullet \rightarrow C$  zwei komultiplikative projektive Auflösungen. Nach dem Fundamentallemma der homologischen Algebra sind sie kettenhomotopieäquivalent; wähle eine Äquivalenz  $f: P_\bullet \leftrightarrow P'_\bullet :g$ . Wir haben nun zwei Abbildungen  $\Delta, (g \otimes g) \circ \Delta' \circ f: P_\bullet \rightarrow \text{Tot } P_\bullet \otimes P_\bullet$ , die beide das Koprodukt  $C \rightarrow C \otimes C$  fortsetzen, also kettenhomotop sind. Also induzieren sie die gleiche Abbildung in Ext. Aber  $\Delta$  induziert die Multiplikation, die von  $P_\bullet$  herrührt, und  $(g \otimes g) \circ \Delta' \circ f$  die, die von  $P'_\bullet$  kommt; sie sind also gleich.

Die Natürlichkeit folgt aus der Natürlichkeit des Produkts auf den Hom-Gruppen bezüglich aller Variablen.  $\square$

**Beispiel 5.1.9.** Wir betrachten wiederum das Beispiel der Gruppenkohomologie von  $G = C_p$ ,  $R = \mathbf{Z}[G] = \mathbf{Z}[t]/(t^p - 1)$ , wobei der Einfachheit halber  $p$  eine Primzahl sei. Wir betrachten die Standardauflösung  $C_\bullet$ . Da

$$\text{Hom}_R(C_\bullet, \mathbf{F}_p) \cong \text{Hom}_R(C_\bullet \otimes_R \mathbf{F}_p, \mathbf{F}_p)$$

gilt, berechnen wir zunächst die Kettenkoalgebra  $C_\bullet \otimes_R \mathbf{F}_p$ . Stellt wiederum  $x_k$  den Erzeuger von  $\mathbf{F}_p$  im Grad  $k$  dar, so erhalten wir

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i \text{ oder } j \text{ gerade} \\ -\binom{p}{2}; & i \text{ und } j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für ungerades  $p$  ist also  $\Delta_{ij} = 0$  für  $i$  und  $j$  ungerade, für  $p = 2$  ist es 1.

Also ist

$$\begin{aligned} H^*(C_2; \mathbf{F}_2) &\cong \mathbf{F}_2[[x]], & |x| = 1 \\ H^*(C_p; \mathbf{F}_p) &\cong \wedge(y) \otimes \mathbf{F}_p[[x]], & |y| = 1, |x| = 2, p \text{ ungerade} \end{aligned}$$

denn die Differenziale dieses Komplexes sind alle null.

Wir haben auch schon gesehen, dass

$$H^i(C_p; \mathbf{Z}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}; & i = 0 \\ \mathbf{Z}/p; & 2 \mid i, i > 0 \\ 0; & 2 \nmid i \end{cases}$$

und dass die Reduktionsabbildung  $H^i(C_p; \mathbf{Z}) \rightarrow H^i(C_p; \mathbf{Z}/n)$  ein Isomorphismus in positiven geraden Graden ist. Da das Produkt funktoriell ist, folgt automatisch:

$$H^*(C_p; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[[x]]/(pz) \quad \text{mit } |x| = 2,$$

und unter der Reduktion geht  $x \mapsto x$  für ungerades  $p$  bzw.  $x \mapsto x^2$  für  $p = 2$ .

Da  $C_p$  abelsch ist, erhalten wir auch eine Komultiplikation auf  $H^*(C_p; \mathbf{F}_p)$ . Diese ist für  $p = 2$  gegeben durch  $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$  (ein solches Element nennt man *primitiv*) und für  $p$  ungerade dadurch, dass sowohl  $x$  also auch  $y$  primitiv sind.

Unter bestimmten Umständen erhält man auch eine Komultiplikation auf Tor. Das Koproduct auf  $P_\bullet$  induziert eine Abbildung

$$H_*(P_\bullet \otimes M) \rightarrow H_*(P_\bullet \otimes P_\bullet \otimes M).$$

Ist  $M$  eine Koalgebra, so kann man die Komultiplikation nachschalten und erhält eine Abbildung

$$\text{Tor}_*^R(C, M) = H_*(P_\bullet \otimes M) \rightarrow H_*(P_\bullet \otimes M \otimes P_\bullet \otimes M),$$

aber im Allgemeinen gilt nicht, dass die Künneth-Abbildung

$$H_*(C_\bullet) \otimes H_*(D_\bullet) \rightarrow H_*(C_\bullet \otimes D_\bullet)$$

ein Isomorphismus ist. Obwohl wir die nötigen Bedingungen schon hier bestimmen könnten, verschieben wir unsere Betrachtungen dazu auf Kapitel 6.

### 5.1.3 Eigenschaften des Produkts

**Proposition 5.1.10.** *Sei  $R$  ein Ring,  $C$  kokommutativ,  $A$  kommutativ. Dann ist das Produkt auf  $\text{Ext}_R^*(C, A)$  (graduirt) kommutativ.*

*Beweis.* Sei  $P_\bullet \rightarrow C$  eine komultiplikative projektive Auflösung über  $R$ . Die vertauschte Multiplikations-Abbildung

$$P_\bullet \xrightarrow{\Delta} P_\bullet \otimes P_\bullet \xrightarrow{\chi} P_\bullet \otimes P_\bullet$$

ist eine Fortsetzung der Komultiplikation, denn  $C$  ist kokommutativ; ebenso ist  $\Delta$  selbst eine Fortsetzung. Also sind beide Abbildungen kettenhomotop und induzieren die gleiche Abbildung in Kohomologie.  $\square$

**Bemerkung 5.1.11.** *Sehr oft ist es nicht möglich, eine kokommutative komultiplikative Auflösung zu finden, obwohl jede komultiplikative Auflösung eine kommutative Multiplikation in der Kohomologie induziert. Dieses Phänomen wird später noch ausführlicher studiert.*

**Lemma 5.1.12** (Transferformel). *Sei  $i: H \rightarrow G$  eine Untergruppe endlichen Indexes und  $R$  eine  $\mathbf{Z}[G]$ -Algebra. Dann gilt für  $x \in H^*(G; R)$ ,  $y \in H^*(H; R)$ :*

$$i_!((i^*x)y) = xi_!(y).$$

*Beweis.* Es ist per Dimensionsverschiebung genug, dies für  $x, y$  vom Grad null zu zeigen. Dann gilt  $i_!(y) = \sum_{g \in G/H} gy$ . Andererseits ist

$$i_!((i^*x)y) = \sum_{g \in G/H} (gi^*x \cdot gy) = \sum_{g \in G/H} i^*(gx)gy = \sum_{g \in G/H} xgy,$$

denn  $x$  ist  $G$ -invariant.  $\square$

## 5.2 Äquivalente Produkte

Es gibt andere Methoden, Produkte auf Ext-Gruppen zu definieren. Eines davon ist das Yoneda-Produkt, das in den Übungen studiert wurde; ein anderes ist das *Kompositionsprodukt*:

**Definition.** Seien  $M_1, M_2, M_3$  drei  $R$ -Moduln. Seien  $P_{i,\bullet}$  projektive Auflösungen von  $M_i$ . Bezeichne mit  $\text{Hom}_R(P_{1,\bullet}, P_{2,\bullet})_\bullet$  den Kettenkomplex mit

$$\text{Hom}_R(P_{1,\bullet}, P_{2,\bullet})_n = \text{Hom}_R(P_{1,\bullet}, P_{2,\bullet+n}).$$

Dann ist die Kompositionsabbildung

$$\circ: \text{Hom}_R(P_{2,\bullet}, P_{3,\bullet})_m \otimes \text{Hom}_R(P_{1,\bullet}, P_{2,\bullet})_n \rightarrow \text{Hom}_R(P_{1,\bullet}, P_{3,\bullet})_{m+n}$$

eine Kettenabbildung und induziert daher eine wohldefinierte Abbildung

$$\circ: \text{Ext}_R^m(M_2, M_3) \otimes \text{Ext}_R^n(M_1, M_2) \rightarrow \text{Ext}_R^{m+n}(M_1, M_3).$$

Wir wollen nun das Kompositionsprodukt mit dem Standardprodukt vergleichen. Das funktioniert zunächst einmal nur für  $M_1 = M_2 = M_3 = \mathbf{Z}$ , aber die Definition des Kompositionsproduktes kann erweitert werden.

**Lemma 5.2.1.** *Sei  $M$  eine flache abelsche Gruppe, und seien  $N_1, N_2$  zwei  $R$ -Moduln. Dann gibt es einen natürlichen Homomorphismus*

$$\text{Ext}_R^*(N_1, N_2) \rightarrow \text{Ext}_R^*(M \otimes N_1, M \otimes N_2),$$

der auf  $\text{Ext}_R^0$  gerade  $f \mapsto \text{id}_M \otimes f$  ist.

*Beweis.* Ist  $P_\bullet \rightarrow N_1$  eine projektive Auflösung und  $f: P_\bullet \rightarrow N_2$ , so ist auch  $M \otimes P_\bullet \rightarrow M \otimes N_1$  eine (nicht mehr projektive, aber immer noch flache) Auflösung von  $M \otimes N_1$ . Also erhält man einen wohldefinierten Morphismus

$$Q_\bullet \rightarrow M \otimes P_\bullet \xrightarrow{\text{id}_M \otimes f} M \otimes N_2,$$

wobei  $Q_\bullet \rightarrow M \otimes N_1$  eine projektive Auflösung und die erste Abbildung eine Fortsetzung der Identität auf  $M \otimes N_1$  ist. Dies liefert ein wohldefiniertes Element in  $\text{Ext}_R^*(M \otimes N_1, M \otimes N_2)$ .  $\square$

**Satz 5.2.2.** *Sei  $R$  ein Ring und  $A$  eine kommutative  $R$ -Algebra und  $C$  eine kokommutative  $R$ -Koyalgebra.  $A$  und  $C$  seien flach über  $\mathbf{Z}$ . Dann ist das Produkt*

$$\begin{aligned} \circ: \text{Ext}_R^i(C, A) \otimes \text{Ext}_R^j(C, A) &\rightarrow \text{Ext}_R^i(C \otimes A, A \otimes A) \otimes \text{Ext}_R^j(C \otimes C, C \otimes A) \\ &\rightarrow \text{Ext}_R^{i+j}(C \otimes C, A \otimes A) \xrightarrow{\Delta^* \circ \mu_*} \text{Ext}_R^{i+j}(C, A) \end{aligned}$$

gleich dem Produkt aus dem letzten Abschnitt.

*Beweis.* Per Dimensionsverschiebung in beiden Variablen müssen wir nur zeigen, dass die Produkte auf  $\text{Hom}_R(C, A) \otimes \text{Hom}_R(C, A) \rightarrow \text{Hom}_R(C, A)$  übereinstimmen, wo dies aber offensichtlich ist.  $\square$

## 5.3 Höhere Produkte

Im Beispiel der Gruppenkohomologie der zyklischen Gruppe  $C_p$  für  $p > 2$  haben wir gesehen, dass zwar für  $y \in H^1(C_p; \mathbf{F}_p)$  gilt  $y^2 = 0$ , aber in der Standardauflösung ist

$$\Delta(x_2) = x_2 \otimes 1 + 1 \otimes x_2 - \sum_{0 \leq \alpha < \beta < p} t^\alpha x_1 \otimes t^\beta x_1.$$

Der gemischte Term verschwindet zwar, wenn man  $t = 1$  setzt, aber er ist nötig, um ein assoziatives Koprodukt zu definieren. Dieser Effekt ist ein Schatten einer sogenannten höheren Multiplikation, eines *Massey-Produkts*.

**Definition.** Sei  $A_\bullet$  eine Kettenalgebra. Seien  $x_i \in A_{n_i}$  Zykel für  $i = 1, 2, 3$ , und es gelte  $x_1 x_2 = x_2 x_3 = 0 \in H_*(A_\bullet)$ . Also gibt es Elemente  $x_{12} \in A_{n_1+n_2+1}$  und  $x_{23} \in A_{n_2+n_3+1}$ , so dass  $d(x_{12}) = x_1 x_2$  und  $d(x_{23}) = x_2 x_3$ . Definiere  $y = x_{12} x_3 - (-1)^{|x_1|} x_1 x_{23}$ . Dann ist  $y$  ein Zykel:

$$d(y) = d(x_{12} x_3 - (-1)^{|x_1|} x_1 x_{23}) = x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Also repräsentiert  $y$  eine Homologieklassen in  $H_{n_1+n_2+n_3+1}(A_\bullet)$ . Die Menge aller solcher  $y$  (die ja von der Wahl von  $x_{12}$  und  $x_{23}$  abhängen) bezeichnen wir mit

$$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subseteq H_{n_1+n_2+n_3+1}(A_\bullet).$$

**Lemma 5.3.1.** 1. Die Menge  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  hängt nur von den Homologieklassen ab, die die  $x_i$  repräsentieren.

2.  $\langle \lambda x_1 + x'_1, x_2, x_3 \rangle \subseteq \lambda \langle x_1, x_2, x_3 \rangle + \langle x'_1, x_2, x_3 \rangle$  für  $\lambda \in k$ , und ähnlich in den anderen Argumenten.
3.  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  ist eine Nebenklasse von  $x_1 H_{n_2+n_3+1}(A_\bullet) + H_{n_1+n_2+1}(A_\bullet) x_3$ .
4. (Erstes Jonglierlemma) Sei zudem  $x_4$  gegeben mit  $x_3 x_4 = 0$ . Dann gilt:

$$x_1 \langle x_2, x_3, x_4 \rangle = (-1)^{n_1+1} \langle x_1, x_2, x_3 \rangle x_4.$$

*Beweis.* 1. Wir zeigen Linearität im ersten Argument. Sei also  $x'_1 = x_1 + d(x_0)$  ein anderer Repräsentant der gleichen Homologieklassen. Dann ist  $d(x_{12} + x_0 x_2) = x'_1 x_2$  und

$$(x_{12} + x_0 x_2) x_3 \pm x'_1 x_{23} = x_{12} x_3 \pm x_1 x_{23} + x_0 x_2 x_3 \pm d(x_0) x_{23}.$$

Aber  $d(x_0 x_{23}) = d(x_0) x_{23} \pm x_0 x_2 x_3$  zeigt, dass der Differenzterm ein Rand ist, also ist  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subseteq \langle x'_1, x_2, x_3 \rangle$ . Da das Argument symmetrisch ist, folgt Gleichheit.

2. Dies folgt daraus, dass ein passendes  $x_{12}$  für  $\lambda x_1 + x'_1$  gegeben ist durch  $\lambda x_{12} + x'_{12}$ , wobei  $d(x_{12}) = x_1 x_2$  und  $d(x'_{12}) = x'_1 x_2$ .
3. Die Unbestimmtheit der Wahl von  $x_{12}$  sind genau die Zyklen in  $H_{n_1+n_2+1}$ , und ähnlich für  $x_{23}$ .

## 5 Multiplikative Strukturen

4. Seien  $x_{23}, x_{34}$  ein definierendes System für  $\langle x_2, x_3, x_4 \rangle$ . Wähle  $d(x_{12}) = x_1 x_2$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & (x_{12}x_3 - (-1)^{n_1}x_1x_{23})x_4 - (-1)^{n_1+1}x_1(x_{23}x_4 - (-1)^{n_2}x_2x_{34}) \\ &= x_{12}x_3x_4 - (-1)^{n_1+n_2}x_1x_2x_{34} = (-1)^{n_1+n_2+1}d(x_{12}x_{34}). \end{aligned}$$

Also ist

$$x_1\langle x_2, x_3, x_4 \rangle \cap (-1)^{n_1+1}\langle x_1, x_2, x_3 \rangle x_4 \neq 0.$$

Da nach Punkt (3) die Unbestimmtheit in beiden Fällen  $(x_1x_4)$  ist, folgt, dass beide Nebenklassen gleich sind.  $\square$

## 6 Spektralsequenzen

Spektralsequenzen sind das wichtigste technische Hilfsmittel für Berechnungen in der homologischen Algebra. Viele empfinden sie als abschreckend, weil sie mehrfach indiziert sind und Berechnungen mit ihnen oft komplex werden; dagegen hilft nur viel Übung und Umgang mit ihnen. Das Buch [McC01] ist die definitive Referenz für die meisten Spektralsequenzen aus der algebraischen Topologie und der homologischen Algebra; allerdings sind zumindest in der ersten Ausgabe zahlreiche Fehler im Detail. Zur Konvergenz von Spektralsequenzen wurde das letzte Wort von Boardman [Boa99] gesprochen; darauf ist auch dieses Kapitel aufgebaut.

### 6.1 Exkurs: Limites und Kolimites

Sei  $\mathcal{I}$  eine kleine Kategorie und  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie. Betrachte den Inklusionsfunktork  $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ , der einem Objekt  $c \in \mathcal{C}$  den konstanten Funktor mit diesem Objekt als Wert zuordnet.

**Definition.** Falls  $\Delta$  einen linksadjungierten Funktor  $\text{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  hat, so heißt dieser *Kolimes* (auch *direkter* oder *induktiver Limes*) und wird mit  $\text{colim}_{\mathcal{I}}$  bezeichnet. Entsprechend heißt ein rechtsadjungierter Funktor, falls er existiert, *Limes* (auch *inverser* oder *projektiver Limes*) und wird mit  $\text{lim}_{\mathcal{I}}$  bezeichnet.

Obwohl es implizit in der Definition steckt, wollen wir die universelle Eigenschaft hervorheben: Sei  $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor (auch  $\mathcal{I}$ -Diagramm genannt). Aus der Adjunktion von  $\Delta$  und  $\text{colim}$  folgt, dass

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim } F, \text{colim } F) \cong \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})}(F, \Delta(\text{colim } F))$$

gilt. Das Bild der Identität unter diesem Isomorphismus ist eine Menge von Abbildungen  $\iota_i: F_i \rightarrow \text{colim } F$ , so dass für jedes  $i \rightarrow j \in \mathcal{I}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{F(i \rightarrow j)} & F(j) \\ & \searrow \iota_i & \swarrow \iota_j \\ & \text{colim } F & \end{array}$$

kommutiert. Die universelle Eigenschaft besagt nun, dass  $\text{colim } F$  das initiale Objekt mit dieser Eigenschaft ist. Genauer sei  $N \in \mathcal{C}$  ein Objekt. Gegeben Morphismen  $f_i: F(i) \rightarrow N$

## 6 Spektralsequenzen

für jedes  $i \in I$ , so dass die entstehenden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{F(i \rightarrow j)} & F(j) \\ & \searrow f_i \quad \swarrow f_j & \\ & N & \end{array}$$

kommutieren, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus  $f: \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F \rightarrow N$ , so dass  $f_i = f \circ \iota_i$  ist.

Wir betrachten im Folgenden nur Limes, deren Indexkategorie  $\mathcal{I}$  die geordnete Menge der ganzen Zahlen ist; ein  $\mathcal{I}$ -Diagramm ist also einfach eine Sequenz in  $\mathcal{C}$ .

Sei  $\cdots \rightarrow M^n \xrightarrow{f} M^{n+1} \rightarrow \cdots$  eine solche Sequenz von  $R$ -Moduln. Wir wollen annehmen, dass alle Abbildungen Monomorphismen sind. Dann ist

$$\operatorname{colim}_n M^n = \bigcup_n M^n \quad \text{und} \quad \lim_n M^n = \bigcap_n M^n,$$

wie man leicht an der universellen Eigenschaft abliest. Sind die Morphismen keine Monomorphismen, ergeben die Symbole auf der rechten Seite keinen Sinn; dennoch sieht man, dass der Kolimes ein Quotient der direkten Summe ist:

$$\operatorname{colim}_n M^n \cong \left( \bigoplus_n M^n \right) / (m_n - f(m_{n-1})), \quad (6.1.1)$$

wohingegen der Limes ein Untermodul des Produktes ist:

$$\lim_n M^n \cong \left\{ (m_n) \in \prod_n M^n \mid m_n = f(m_{n-1}) \right\} \quad (6.1.2)$$

Also existieren in  $\operatorname{Mod}_R$  alle *sequenziellen* Limes und Kolimes. (In der Tat existieren alle Limes und Kolimes, aber das soll uns hier nicht beschäftigen.)

Unmittelbar offensichtlich ist auch, dass  $\operatorname{colim}_n M^n = M^{n_0}$ , falls die Sequenz für  $n \geq n_0$  konstant wird; ebenso gilt  $\lim_n M^n = M^{n_0}$ , falls die Sequenz für  $n \leq n_0$  konstant wird. Allgemeiner gilt, dass man von  $\mathbf{Z}$  immer zu einer einseitig unbeschränkten Indexmenge übergehen kann, ohne den Limes zu ändern.

**Lemma 6.1.3.** Sei  $S$  eine nach oben unbeschränkte Teilmenge von  $\mathbf{Z}$ . Dann gibt es für jede Sequenz  $\{M^n, f^n\}$  einen natürlichen Isomorphismus

$$\operatorname{colim}_{n \in \mathbf{Z}} M^n \xrightarrow{\cong} \operatorname{colim}_{n \in S} M^n.$$

Ist  $S$  dagegen nach unten unbeschränkt, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\lim_{n \in S} M^n \xrightarrow{\cong} \lim_{n \in \mathbf{Z}} M^n$$

*Beweis.* Durch Übergang zur oppositionellen Kategorie folgt der erste Teil aus dem zweiten. Die Abbildungen

$$\{\lim_{n \in S} M^n \rightarrow M^k\}_{k \in Z}$$

liefern die kanonische Abbildung in der Aussage des Lemmas, deren Inverse induziert wird durch die Abbildungen

$$\{\lim_{n \in Z} M^n \rightarrow M^k\}_{k \in S}. \quad \square$$

**Beispiel 6.1.4.** Betrachten wir die Sequenz  $\cdots \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z} \xrightarrow{n} \cdots$ . Der Kolimes dieser Sequenz ist die Gruppe  $\mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$ , wobei die Inklusion  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}[\frac{1}{n}]$  des  $i$ -ten Eintrags  $\mathbf{Z}$  gegeben ist durch Multiplikation mit  $n^{-i}$ . Der Limes dieser Folge ist dagegen null. (Beschreibung (6.1.2) impliziert, dass es die Menge der beliebig oft durch  $n$  teilbaren Elemente ist. Das einzige solche Element in  $\mathbf{Z}$  ist die Null.)

**Beispiel 6.1.5.** Der Limes der Sequenz  $\cdots \rightarrow \mathbf{Z}/p^n \rightarrow \mathbf{Z}/p^{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{Z}/p \rightarrow 0$ , wobei die Abbildungen surjektiv sind, ist die Gruppe der  $p$ -adischen Zahlen  $\mathbf{Z}_p$  (siehe Übung 1.3.10).

### 6.1.1 Exaktheit von Limes und Kolimes

Die Kategorie der  $\mathbf{Z}$ -Diagramme in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  (also der Sequenzen) ist eine abelsche Kategorie (vgl. Übung 2.2.8), und die Funktoren  $\lim$  und  $\operatorname{colim}$  sind additive Funktoren. Also kann man nach den Exaktheitseigenschaften dieser beiden Funktoren fragen. Dies hängt von der zu Grunde liegenden Kategorie  $\mathcal{C}$  ab.

**Proposition 6.1.6.** *Der Funktor  $\operatorname{colim}$  in der Kategorie der  $R$ -Moduln ist exakt. Der Funktor  $\lim$  ist linksexakt.*

*Beweis.* Die Beschreibung (6.1.1) kann man diagrammatischer so umformulieren:

$$\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M^n \xrightarrow{x \mapsto f(x) - x} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M^n \rightarrow \operatorname{colim}_{n \in \mathbf{Z}} M^n \rightarrow 0$$

ist exakt. Die linke Abbildung ist aber injektiv, denn ein Element  $(m_n, \dots, m_N)$  hat nur endlich viele von null verschiedene Einträge, ist das Bild also null, so folgt, dass  $m_n = 0$  ist, und induktiv, dass alle  $m_i = 0$ .

Ist nun  $0 \rightarrow \{A^n\} \rightarrow \{B^n\} \rightarrow \{C^n\} \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von Sequenzen,

## 6 Spektralsequenzen

so erhalten wir ein Neunerdiagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} A^n & \longrightarrow & \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} A^n & \longrightarrow & \operatorname{colim}_{n \in \mathbf{Z}} A^n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} B^n & \longrightarrow & \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} B^n & \longrightarrow & \operatorname{colim}_{n \in \mathbf{Z}} B^n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C^n & \longrightarrow & \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} C^n & \longrightarrow & \operatorname{colim}_{n \in \mathbf{Z}} C^n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

mit exakten Zeilen und Spalten. Eine einfache Diagrammjagd (das „Neunerlemma“, ein Spezialfall des Schlangenlemmas) zeigt, dass in einer solchen Situation (fünf von sechs Sequenzen sind exakt) auch die Kolimes-Sequenz kurz exakt ist.

Das umgekehrte Diagramm

$$0 \rightarrow \lim_{n \in \mathbf{Z}} M^n \rightarrow \prod_{n \in \mathbf{Z}} M^n \xrightarrow{x \mapsto f(x) - x} \prod_{n \in \mathbf{Z}} M^n$$

liefert eine Beschreibung des Limes als Kern; also ist der Limes linksexakt. Das vorherige Argument dualisiert sich jedoch nicht, denn wir können nicht schließen, dass die rechte Abbildung surjektiv ist.  $\square$

**Beispiel 6.1.7.** Dieses Beispiel zeigt, dass der Limes von  $R$ -Moduln ist nicht notwendig exakt ist. Wir betrachten die Sequenz aus Beispiel 6.1.4 lokalisiert bei  $n = p$  und bilden sie in eine konstante Sequenz ab:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_{(p)} & \longrightarrow & \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/p^\infty \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow p & & \cong \downarrow p & & \downarrow p \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}_{(p)} & \longrightarrow & \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/p^\infty \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow p & & \cong \downarrow p & & \downarrow p \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Der Limes der rechten Spalte ist  $\mathbf{Q}_p = \mathbf{Z}_p \otimes \mathbf{Q}$ , der Körper der  $p$ -adischen Zahlen (**Warum?**). Somit erhalten wir im Limes die Sequenz  $0 \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}_p$ , die sicher nicht rechtsexakt ist, denn  $\mathbf{Q} \not\cong \mathbf{Q}_p$ .

Wir erhalten also abgeleitete Funktoren  $R^n \lim =: \lim^n$ , die wir im Folgenden studieren werden.

**Proposition 6.1.8.** *Eine Sequenz  $(I^n, f^n)$ , in der alle  $f^n$  zerfallende Epimorphismen und alle  $I^n$  injektiv sind, ist injektiv als Objekt in  $\text{Fun}(\mathbf{Z}, \text{Mod}_R)$ .*

To be filled in! □

**Korollar 6.1.9.** *Seien  $M_n$  Moduln über  $R$ . Dann ist für alle  $k \geq 0$*

$$\lim_n^k \prod_{i=-n}^{\infty} M_i = 0.$$

*Beweis.* Wähle injektive Auflösungen  $M_n \rightarrow I_{n,\bullet}$ . Nach Proposition 6.1.8 ist

$$\prod_{i=-n}^{\infty} M_i \rightarrow \prod_{i=-n}^{\infty} I_{i,\bullet}$$

eine injektive Auflösung. Also reduziert sich die Behauptung zu der offensichtlichen Beobachtung, dass

$$\lim_n \prod_{i=-n}^{\infty} I_{i,k} = \bigcap_n \prod_{i=-n}^{\infty} I_{i,k} = 0 \quad \text{für alle } k.$$

□

**Korollar 6.1.10.** *Seien  $M_n$  Moduln über  $R$ . Dann ist  $\lim_n^k \prod_{i=0}^{-n} M_i = 0$  für  $k > 0$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \left\{ \prod_{i=-(n+1)}^{\infty} M_i \right\}_n \rightarrow \left\{ \prod_{i=0}^{\infty} M_i \right\}_n \rightarrow \left\{ \prod_{i=0}^{-n} M_i \right\}_n \rightarrow 0.$$

Die linke Sequenz und mittlere Sequenz (letztere ist konstant) erfüllen die Bedingungen von Korollar 6.1.9, haben also verschwindende höhere Limites. Also gilt das gleiche für die rechte Sequenz. □

**Korollar 6.1.11.** *Für jede Sequenz  $(M^n, f^n)$  gilt  $\lim_n^k M^n = 0$  für  $k \geq 2$ . Insbesondere ist  $\lim^1$  rechtsexakt.*

*Beweis.* Betrachten wir die kurze exakte Sequenz von Sequenzen

$$0 \rightarrow \{M^n\}_n \rightarrow \left\{ \prod_{i=0}^{-n} M^i \right\}_n \xrightarrow{m_i - f(m_{i-1})} \left\{ \prod_{i=0}^{-n} M^i \right\}_n \rightarrow 0.$$

Sie liefert eine lange exakte Sequenz der abgeleiteten Funktoren des Limes, und nach Korollar 6.1.10 folgt, dass  $\lim^2 = \lim^3 = \dots = 0$ . □

## 6 Spektralsequenzen

**Korollar 6.1.12.** Sei  $(M^\bullet, f^\bullet)$  eine Sequenz, in der alle  $f^i$  Epimorphismen sind, oder alle  $f^i$  null sind. Dann gilt für alle  $i > 0$ , dass  $\lim_n^i M^n = 0$ .

*Beweis.* Da alle  $f^i$  surjektiv sind, ist auch die Sequenz

$$0 \rightarrow \lim_n M^n \rightarrow \prod_{i=0}^{\infty} M^i \xrightarrow{m_i - f(m_{i-1})} \prod_{i=0}^{\infty} M^i \rightarrow 0$$

kurz exakt. Das Resultat folgt aus Korollar 6.1.11 □

**Definition.** Sei  $(M_\bullet, f_\bullet)$  eine Sequenz von  $R$ -Moduln und  $r: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$  eine monotone Funktion. Die  $r$ -Bildersequenz  $\text{Im}^r M_\bullet$  ist die Untersequenz  $N_i < M_i$ , die definiert ist durch  $N_i = \text{im}(f^{r(i)}: M_{i+r(i)} \rightarrow M_i)$ . Hierbei ist per Definition

$$\text{im}(f^\infty) = \bigcap_{j \geq 0} \text{im}(f^j: M_{i+j} \rightarrow M_i).$$

**Lemma 6.1.13.** Für jede monotone Funktion  $r$  gilt, dass  $\lim M_\bullet \cong \lim \text{Im}^r M_\bullet$ . Ist  $r$  endlich, so gilt auch  $\lim^1 M_\bullet \cong \lim^1 \text{Im}^r M_\bullet$ .

*Beweis.* Ist  $r(i) = \infty$  für fast alle  $i$ , so müssen wir zeigen, dass  $\lim M_\bullet = \lim \text{Im}^\infty M_\bullet$ . Da ein Element in  $\lim M_\bullet$  gegeben ist durch  $(m_i)_{i \in \mathbf{Z}}$  mit  $f(m_{i+1}) = m_i$ , liegt  $m_i$  automatisch in  $\text{Im}^\infty M_i$ , und wir erhalten einen Morphismus  $\lim M_\bullet \rightarrow \lim \text{Im}^\infty M_\bullet$ . Die Inklusionen  $\text{Im}^\infty M_i \rightarrow M_i$  induzieren eine inverse Abbildung.

Sei nun  $r(i) < \infty$  für alle  $i$ . Nach Lemma 6.1.3 können wir stets zu der Indexmenge  $\{r(i)\}_{i \in \mathbf{Z}}$  übergehen, ohne den Limes zu ändern (und wegen der Natürlichkeit des Isomorphismus auch, ohne die abgeleiteten Limes zu ändern). Wir nehmen also  $r \equiv 1$  an und betrachten die kurze exakte Sequenz von Sequenzen

$$0 \rightarrow \text{Im}^1 M_\bullet \rightarrow M_\bullet \rightarrow M_\bullet / \text{Im}^1 M_\bullet \rightarrow 0.$$

Die Abbildungen in der Sequenz auf der rechten Seite sind alle null, also folgt aus der langen exakten Sequenz und Lemma 6.1.12, dass  $\lim^1 \text{Im}^1 M_\bullet \cong \lim^1 M_\bullet$ . □

**Proposition 6.1.14.** Falls  $\lim M_\bullet = 0$ ,  $\text{Im}^\infty M_r = 0$  und  $\lim_n^1 \text{Im}^n M_r = 0$  für alle  $r$ , so ist auch  $\lim^1 M_\bullet = 0$ .

*Beweis.* Betrachte die Doppelsequenz

$$I_{p,q} = \begin{cases} M_p; & \text{falls } q \leq p \\ \text{Im}^{q-p} M_p; & \text{falls } q > p. \end{cases}$$

Da  $I_{p,q} = M_p$  für genügend großes  $p$ , ist  $\lim_p^k I_{p,q} = \lim_p^k M_p$ . Also haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \prod_{p=0}^{\infty} I_{p,q} \xrightarrow{x \mapsto x - f(x)} \prod_{p=0}^{\infty} I_{p,q} \rightarrow \lim^1 M_\bullet \rightarrow 0.$$

Andererseits ist  $I_{p,q} = \text{Im}^{q-p} M_p$  für großes  $q$ ; also erhält man durch Limesbildung in  $q$  und die Beobachtung, dass  $\lim^k$  mit beliebigen Produkten vertauscht:

$$0 \rightarrow \prod_{p=0}^{\infty} \text{Im}^{\infty} M_p \rightarrow \prod_{p=0}^{\infty} \text{Im}^{\infty} M_p \rightarrow \lim^1 M_{\bullet} \rightarrow \prod_{p=0}^{\infty} \lim^1_{q} \text{Im}^{q-p} M_p \rightarrow \dots$$

Da alle anderen Terme null sind, ist auch  $\lim^1 M_{\bullet} = 0$ . □

**Definition.** Eine Sequenz  $M_{\bullet}$  heißt *mittag-lefflersch*, falls es eine monotone Funktion  $r < \infty$  gibt, so dass  $\text{Im}^r M_{\bullet} = \text{Im}^{\infty} M_{\bullet}$ .

**Korollar 6.1.15.** Ist  $M_{\bullet}$  *mittag-lefflersch*, so gilt  $\lim^1 M_{\bullet} = 0$ .

*Beweis.* Nach Lemma 6.1.13 genügt es, zu zeigen, dass  $\lim^1 \text{Im}^{\infty} M_{\bullet} = 0$  gilt. Dies folgt aus Korollar 6.1.12. □

## 6.2 Filtrierte Kettenkomplexe

**Definition.** Sei  $\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie mit allen sequenziellen Limites und Kolimites, und sei  $X \in \mathcal{C}$ . Eine *Filtrierung* von  $X$  ist eine Folge von Inklusionen

$$\dots F^n X < F^{n+1} X < \dots < X, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Die Filtrierung heißt

- *erschöpfend*, falls  $X = \text{colim}_n F^n X$ ,
- *hausdorffsch*, falls  $\lim_n F^n X = 0$ , und
- *vollständig*, falls  $\lim^1_n F^n = 0$ .

Wir definieren das *assoziierte Objekt*  $QF^{\bullet} X$  zu der Filtrierung als die Folge der Filtrierungsquotienten  $QF^n = (F^n X / F^{n-1} X)$ .

Besonders wichtig ist der Fall, wo  $\mathcal{C}$  die Kategorie der Kettenkomplexe in einer anderen abelschen Kategorie  $\mathcal{D}$  ist. Die Fragestellung, die zu Spektralsequenzen führt, ist diese: Können wir aus dem Wissen über die Homologie der Filtrierungsquotienten auf die Homologie des ursprünglichen Objektes schließen? Ein einfaches Beispiel soll dies illustrieren:

Sei  $0 \rightarrow C'_{\bullet} \rightarrow C_{\bullet} \rightarrow C''_{\bullet} \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Wir können

$$0 < F^0(C_{\bullet}) := C'_{\bullet} < F^1(C_{\bullet}) := C_{\bullet}$$

als eine (recht kurze) Filtrierung von  $C_{\bullet}$  auffassen; die Filtrierungsquotienten sind

$$QF^0 C_{\bullet} = C'_{\bullet} \quad \text{und} \quad QF^1 C_{\bullet} = C''_{\bullet};$$

## 6 Spektralsequenzen

Alle anderen  $QF^i$  sind null. Wir wissen, dass wir eine lange exakte Sequenz erhalten:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(QF^0) \rightarrow H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(QF^1) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(QF^0) \rightarrow \cdots$$

Das heißt, wir erhalten kurze exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} \partial \rightarrow H_n(C_\bullet) \rightarrow \ker \partial \rightarrow 0.$$

Wir können also die Homologie von  $C_\bullet$  bis auf Erweiterungen bestimmen, wenn wir die Homologie der Filtrierungsquotienten kennen sowie das „Differenzial“  $\partial$ .

Spektralsequenzen verallgemeinern dies, und lange exakte Sequenzen sind der Spezialfall einer zweistufigen Filtrierung.

**Beispiel 6.2.1.** Zur Einstimmung studieren wir den nächstkomplizierteren Fall einer dreistufigen Filtrierung. Sei also  $C$  ein Kettenkomplex und  $0 < C_0 < C_1 < C_2 = C$  eine Filtrierung. Für jede Inklusion  $C_i < C_j$  mit  $i < j$  erhalten wir eine lange exakte Sequenz, die sich zu folgendem zopfartigen kommutativen Diagramm zusammensetzen; dazu bezeichnen wir mit  $C_{ij}$  den Quotienten  $C_i/C_j$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \xrightarrow{d^2} & & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\
 & H_{n+1}(C_{21}) & & H_n(C_{10}) & & H_{n-1}(C_0) & & \cdots & (6.2.2) \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 \cdots & & & H_n(C_1) & & H_n(C_{20}) & & H_{n-1}(C_1) & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & H_n(C_0) & & H_n(C_2) & & H_n(C_{21}) & & \cdots & \\
 & & \xrightarrow{d^3} & & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{d^2} & & \\
 & & & & & & & & 
 \end{array}$$

Alle vier Stränge sind hier lange exakte Sequenzen. Als bekannt setzen wir die Homologiegruppen der Filtrierungsquotienten voraus, also  $H_*(C_0)$ ,  $H_*(C_{10})$  und  $H_*(C_{21})$ . Dann erhalten wir die gesuchte Homologie von  $H_*(C_2)$  in zwei Schritten:

1. Zunächst ist die Homologie von  $C_{20}$  bis auf Erweiterung berechenbar aus der Kenntnis des Verbindungshomomorphismus  $d^2$ :

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} d^2 \rightarrow H_n(C_{20}) \rightarrow \ker d^2 \rightarrow 0.$$

2. Daraus erhält man eine Berechnung der Homologie von  $C$ :

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} d^3 \rightarrow H_n(C) \rightarrow \ker d^3 \rightarrow 0.$$

Das Prinzip der Spektralsequenz eines filtrierten Komplexes ist, dass konsekutiv die Homologie immer größerer Filtrierungsquotienten  $F^{n+k}/F^n$  berechnet werden, angefangen mit den als bekannt vorausgesetzten  $QF^n$ . Ist die Filtrierung endlich, so ist man nach entsprechend endlich vielen Schritten am Ziel; ansonsten gibt es einen Grenzwertprozess und (im Allgemeinen) ein Konvergenzproblem, das man behandeln muss.

### 6.2.1 Filtrierungen und Metriken

Die Terminologie für Filtrierungen ist von der Topologie metrischer Räume entlehnt: Ist eine Filtrierung  $F$  von  $X$  gegeben, so erhalten wir eine Pseudo-Metrik auf  $X$ , das heißt, eine Funktion  $d_F: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ , die symmetrisch ist und die Dreiecksungleichung erfüllt, durch

$$d_F(x_1, x_2) = \inf\{e^n \mid x_1 - x_2 \in F^n X\}.$$

(Hierbei ist das Infimum der leeren Menge als  $\infty$  definiert.)

Das folgende Lemma erklärt, warum die Begriffe „hausdorffsch“ und „vollständig“ sinnvoll sind, wird aber im weiteren Verlauf dieses Buchs keine Rolle spielen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass  $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$ .

**Lemma 6.2.3.** 1. Die Pseudo-Metrik  $d_F$  ist genau dann endlich (d.h.  $d(x, y) < \infty$  für alle  $x, y \in X$ ), wenn die Filtrierung vollständig ist.

2. Die Pseudo-Metrik  $d_F$  ist genau dann eine Metrik (mit Wertebereich  $[0, \infty]$ ), d.h. die von  $d_F$  induzierte Topologie ist hausdorffsch, wenn die Filtrierung  $F$  hausdorffsch ist.

3. Sei  $C(F)$  der  $R$ -Modul der Cauchy-Folgen  $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$  in  $X$  und  $N(F) \subset C(F)$  der Untermodul der Nullfolgen. Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow N(F) \rightarrow C(F) \rightarrow \lim_n X/F^n X \rightarrow 0.$$

4. Die Filtrierung  $F$  ist genau dann vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in  $X$  konvergiert.

*Beweis.* 1. ist offensichtlich.

2. Es gilt  $d(x_1, x_2) = 0$  genau dann, wenn  $x_1 - x_2 \in F^n X$  für unendlich viele  $n < 0$ . Da  $F^n X \subset F^{n+1} X$ , ist das äquivalent dazu, dass  $x_1 - x_2$  in  $F^n X$  für alle  $n \in \mathbf{Z}$  liegt, also  $x_1 - x_2 \in \bigcap_n F^n X = \lim_n F^n X$ . Ist also  $F$  hausdorffsch, so muss  $x_1 = x_2$  gelten, und  $d_F$  ist eine Metrik; ist andererseits  $d_F$  eine Metrik, so folgt aus  $x \in \lim_n F^n X$ , dass  $d_F(x, 0) = 0$  und somit  $x = 0$ .

3. Eine Cauchy-Folge in  $X$  ist eine Folge  $(x_i)$ , so dass für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  gilt:  $x_i - x_j \in F^n X$  für genügend große  $i, j$ . Das heißt, die Folge der Bilder von  $(x_i)$  in  $X/F^n X$  wird schließlich konstant für jedes  $n$ ; wir nennen den schließlich konstanten Wert  $\bar{x}_\infty^{(n)}$ . Diese Elemente stellen zusammen ein Element  $\phi(x_i) \in \lim_n X/F^n X$  dar. Die so definierte Funktion  $\phi: C(F) \rightarrow \lim_n X/F^n X$  ist ein  $R$ -Modulhomomorphismus.

Wir zeigen zunächst, dass  $\phi$  surjektiv ist: ein Element in  $\lim_n X/F^n X$  wird repräsentiert durch eine Folge  $x^{(n)} \in X$  mit  $x^{(n)} \equiv x^{(m)} \pmod{F^{\max(m,n)} X}$ . Setzen wir  $x_n = x^{-n}$ , so erhalten wir eine Cauchy-Folge im Urbild unter  $\phi$ . Nun betrachten wir den Kern von  $\phi$ : Eine Folge  $(x_i)$ , so dass  $\phi(x_i) = 0$  gilt, hat die Eigenschaft, dass für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  die Folge  $x_i$  schließlich in  $F^n X$  liegt. Also ist  $x_i$  eine Nullfolge (wobei es auch weitere, von null verschiedene Grenzwerte geben kann, wenn  $F$  nicht hausdorffsch ist).

## 6 Spektralsequenzen

4. Die Folge  $(x_i)$  konvergiert genau dann, wenn

$$\phi(x_i) \in \text{im}(X \rightarrow \lim_n X/F^n X)$$

Die lange exakte Sequenz, die sich durch Anwendung von  $\lim_n$  auf

$$0 \rightarrow F^n X \rightarrow X \rightarrow X/F^n X \rightarrow 0$$

ergibt, ist

$$0 \rightarrow \lim_n F^n X \rightarrow X \rightarrow \lim_n X/F^n X \rightarrow \lim_n {}^1 F^n X \rightarrow 0.$$

Also konvergiert die Cauchy-Folge  $(x_i)$  genau dann, wenn ihr Bild in  $\lim_n {}^1 F^n X$  null ist. Da umgekehrt  $\lim_n X/F^n X \rightarrow \lim_n {}^1 F^n X$  surjektiv ist und jedes Element in  $\lim_n X/F^n X$  durch eine Cauchy-Folge realisiert wird, folgt die Behauptung.  $\square$

### 6.3 Spektralsequenzen und exakte Tripel

**Definition.** Eine *Spektralsequenz* in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  ist eine Folge  $(E^i, d^i)$  ( $i \in \mathbf{N}$ ) von Objekten  $E^i$  und Morphismen  $d^i: E^i \rightarrow E^i$ , so dass

1.  $(E^i, d^i)$  für alle  $i$  ein Kettenkomplex ist und
2.  $E^{i+1} = H_*(E^i, d^i)$ .

Wir bezeichnen die Zykel in  $E^i$  mit  $\tilde{Z}^i$  und die Ränder mit  $\tilde{B}^i$ . Da

$$\tilde{B}^i < \tilde{Z}^i < E^i = \tilde{Z}^{i-1} / \tilde{B}^{i-1},$$

können wir induktiv Unterobjekte  $B^i < Z^i < E^1$  mit  $B^i/B^{i-1} = \tilde{B}^i$ ,  $Z^i/B^{i-1} = \tilde{Z}^i$  und  $Z^i/B^i = \tilde{Z}^i/\tilde{B}^i = E^{i+1}$  definieren und erhalten damit eine Kette von Inklusionen

$$B^1 < \dots < B^{n-1} < B^n < \dots < Z^n < Z^{n-1} < \dots < Z^1.$$

Wir definieren  $Z^\infty = \bigcap_n Z^n$ ,  $B^\infty = \bigcup_n B^n$ , und  $E^\infty = Z^\infty/B^\infty$ . Für Elemente in Spektralsequenzen gibt es eine etwas blumige Sprache, die aber zur Kultur gehört. Man sagt, dass ein Element  $x \in E^1$  *bis zum  $E^k$ -Term überlebt*, falls  $x \in Z^k$ , aber  $x \notin B^k$  ( $k \leq \infty$ ). Wir sagen, dass  $x$  *schlicht überlebt*, falls es bis zum  $E^\infty$ -Term überlebt. Ist  $x \in B^k - B^{k-1}$ , so sagt man, dass  $x$  *im  $E^k$ -Term stirbt*, oder, wenn  $x = d(y)$  für ein  $y \in E^k$ , dass  $x$  *von  $y$  getötet wird*.

Die Spektralsequenz *bricht im  $E^k$ -Term zusammen*, wenn  $d^l = 0$  für alle  $l \geq k$  (oder äquivalent, wenn  $E^k = E^{k+1} = \dots = E^\infty$ ).

**Beispiel 6.3.1.** Betrachten wir noch einmal Beispiel 6.2.1, die Homologie einer dreistufigen Filtrierung. Sei

$$\begin{aligned}
 E^1 &= \bigoplus_n (C_{10,n} \oplus C_{21,n}) \\
 d^1: C_{ij,k} &\rightarrow C_{ij,k-1} && \text{das Differenzial der Kettenkomplexe} \\
 E^2 &= \bigoplus_n (H_n(C_{10}) \oplus H_n(C_{21})) \\
 d^2: H_{n+1}(C_{21}) &\rightarrow H_n(C_{10}) && \text{wie im vorigen Diagramm} \\
 E^3 &= \text{coker } d^2 \oplus \text{ker } d^2 = \text{im} + \text{coker}(H_n(C_{10}) \rightarrow H_n(C_{20})) \\
 d^3 &&& \text{von der Abbildung in Diagramm (6.2.2) induziert} \\
 E^4 = \dots = E^\infty &= \text{etwas, das } H_n(C_2) \text{ approximiert.}
 \end{aligned}$$

Um genauer zu bestimmen, wie  $E^4$  (oder im Allgemeinen  $E^\infty$ ) mit  $H_*(C)$  zusammenhängt, betrachten wir das Konzept der exakten Tripel, die eine Quelle von Spektralsequenzen darstellen.

**Definition.** Ein *exaktes Tripel* in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein (nichtkommutatives) Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{i} & D \\
 & \swarrow k & \searrow j \\
 & E &
 \end{array}$$

so dass

$$\dots \rightarrow D \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{k} D \xrightarrow{i} D \rightarrow \dots$$

eine lange exakte Sequenz ist. Wir bezeichnen die Komposition  $j \circ k$  mit  $d$ ; offensichtlich gilt  $0 = d \circ d: E \rightarrow E$ , denn  $k \circ j = 0$ .

Das *abgeleitete Tripel*  $(D', E', i', j', k')$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 E' &= H_*(E, d) \\
 D' &= \text{im}(i) = \text{ker}(j) \\
 i' &= i|_{D'} \\
 j'(x') &= [j(x)], \text{ falls } i(x) = x' \\
 k'[y'] &= k(y).
 \end{aligned}$$

**Lemma 6.3.2.** *Das abgeleitete Tripel ist wiederum ein exaktes Tripel.*

*Beweis.* Zunächst zur Wohldefiniertheit von  $j'$  und  $k'$ : Ist  $x \in D$  so, dass  $i(x) = x' = 0$ , so ist  $x \in \text{im } k$  wegen der Exaktheit, etwa  $d = k(\tilde{x})$ . Damit ist  $j(x) = d(\tilde{x}) \in B(E, d)$ , also repräsentiert  $j(x)$  die Nullklasse in  $E'$ .

Ist  $y' = d(\tilde{y}) \in B(E, d)$ , so ist  $k(y) = kjk(\tilde{y}) = 0$ , also ist auch  $k'$  wohldefiniert.

## 6 Spektralsequenzen

Nun zur Exaktheit. Zunächst links oben: sei  $x' \in D'$  so, dass  $i(x') = 0$ . Dann gibt es ein  $y \in E$  mit  $k(y) = x'$ . Da  $x' \in \ker(j)$ , gilt auch  $d(y) = jk(y) = 0$ , also repräsentiert  $y$  eine Homologiekategorie in  $E'$  mit  $k'[y] = x'$ .

Nun rechts oben: Sei  $x' \in D'$  im Kern von  $j'$ . Das heißt, dass  $x' = i(i(\tilde{x}))$  für ein  $\tilde{x}$  gilt. Also liegt  $x'$  im Bild von  $i'$ .

Schließlich die Exaktheit bei  $E'$ : Sei  $y \in E$  so, dass  $d(y) = 0$  und  $k'(y) = 0$  (also schlicht  $k(y) = 0$ ). Dann gibt es ein  $x \in D$  mit  $j(x) = y$ . Dann ist  $i(x)$  ein Urbild von  $y$  unter  $j'$ , denn  $j'(i(x)) = j(x)$ .  $\square$

**Lemma 6.3.3.** 1. Durch iteriertes Ableiten entsteht aus einem exakten Tripel  $(D, E, i, j, k)$  eine Folge  $(D^n, E^n, i^{(n)}, j^{(n)}, k^{(n)})$  mit  $(D^1, E^1, i^{(1)}, j^{(1)}, k^{(1)}) = (D, E, i, j, k)$ . Setzen wir  $Z^n = k^{-1} \operatorname{im}(i^{n-1})$  und  $B^n = j(\ker(i^{n-1}))$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} D^n &= \operatorname{im}(i^{n-1}: D \rightarrow D) \subseteq D \\ E^n &= Z^n / B^n \\ i^{(n)} &= i|_{D^n} \\ j^{(n)} &= [j \circ i^{-(n-1)}] \\ k^{(n)} &= k|_{Z^n}. \end{aligned}$$

2. Sei  $d^n = j^{(n)} \circ k^{(n)}$ . Dann bildet  $(E^n, d^n)$  eine Spektralsequenz.

*Beweis.* Es ist nur die Beschreibung von  $E^{n+1}$  zu begründen. Da  $Z^1 = k^{-1}D = E$  und  $B^1 = j(\ker \operatorname{id}) = 0$ , ist die Induktion verankert. Die Zykel von  $d^n = j \circ i^{-(n-1)} \circ k$  sind genau  $Z^{n+1}/B^n$ ; die Ränder dagegen  $B^{n+1}/B^n$ .  $\square$

Ein exaktes Tripel erhält man zum Beispiel aus einer Filtrierung  $F^\bullet C_\bullet$  eines Kettenkomplexes via

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{r,s} H_{s+r}(F^r C_\bullet) & \longrightarrow & \bigoplus_{r,s} H_{s+r}(F^r C_\bullet) \\ & \swarrow \partial & \searrow \\ & \bigoplus_{r,s} H_{s+r}(QF^r C_\bullet), & \end{array}$$

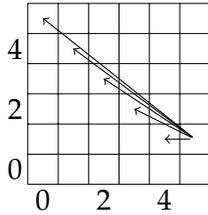
das aus den einzelnen langen exakten Sequenzen für  $F^{r-1}C_\bullet \rightarrow F^r C_\bullet \rightarrow QF^r C_\bullet$  gebildet wird. Hier (und meist bei Spektralsequenzen) haben wir eine *natürliche Bigraduierung* und schreiben deshalb:

$$D_{r,s}^1 = H_{r+s}(F^r C_\bullet) \quad \text{und} \quad E_{r,s}^1 = H_{r+s}(QF^r C_\bullet).$$

Die Bigrade der Abbildungen in dem exakten Tripel und seinen abgeleiteten Tripeln ist dann

$$\begin{aligned} |i^{(n)}| &= (1, -1) \\ |j^{(n)}| &= (-(n-1), n-1) \\ |k^{(n)}| &= (-1, 0) \\ |d^n| &= (-n, n-1). \end{aligned}$$

Üblicherweise notiert man eine Spektralsequenz in einem zweidimensionalen Diagramm; die Differenziale  $d^n$  haben dann die folgenden Grade:



## 6.4 Der zentrale Konvergenzsatz

In diesem Kapitel wird studiert, unter welchen Umständen eine Spektralsequenz tatsächlich vollständig Auskunft über die Homologie eines Kettenkomplexes gibt. Dabei beschränken wir uns nicht, wie oft in der Literatur, auf Spektralsequenzen, die in einem Quadranten oder eine Halbebene konzentriert sind, sondern halten uns an den modernen Zugang von Boardman [Boa99].

Neben der Filtrierung des Kettenkomplexes können wir auch eine Filtrierung der Homologie  $H_*(C)$  definieren durch  $F^n H_*(C) = \text{im}(H_*(F^n C) \rightarrow H_*(C))$ .

**Satz 6.4.1.** Sei  $F^\bullet C_\bullet$  eine hausdorffsche, vollständige und erschöpfende Filtrierung eines Kettenkomplexes in  $\text{Mod}_R$  und  $E_{**}^*$  die zugehörige Spektralsequenz mit  $E^1$ -Term

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(QF^p C_\bullet).$$

Es sei die folgende konditionale Konvergenzeigenschaft erfüllt:

$$\lim_r^1 H_k(F^r C_\bullet) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbf{Z}. \quad (6.4.2)$$

Außerdem mögen folgende Bedingungen an die Differenziale erfüllt sein:

1. Für jedes  $p$  und  $q$  gebe es nur endlich viele  $r$ , so dass  $d_r \neq 0$  auf  $E_{p,q}^r$  gilt und
2. Für jedes  $n \in \mathbf{Z}$  verschwinde  $d_{u+v}: E_{u,n-u+1}^{u+v} \rightarrow E_{-v,n+v}^{u+v}$  für genügend große  $u$  und  $v$ .

Dann ist die Filtrierung  $F^\bullet H_*(C_\bullet)$  ebenfalls vollständig, hausdorffsch und erschöpfend, und

$$E_{p,q}^\infty = QF^p H_{p+q}(C_\bullet).$$

(Wir schreiben hierfür auch  $E_{p,q}^1 \implies H_{p+q}(C_\bullet)$  und sagen, dass  $E_{**}^*$  stark gegen  $H_*(C_\bullet)$  konvergiert).

Die erste Bedingung an die Differenziale besagt, dass an jeder Koordinate nur endlich viele Differenziale leben dürfen; die zweite Bedingung besagt, dass sich nie unendlich viele nichtverschwindende Differenziale überkreuzen dürfen.

**Korollar 6.4.3.** Die Folgerung des Satzes gilt in folgenden Fällen:

## 6 Spektralsequenzen

1. Die Spektralsequenz liegt im ersten Quadranten (d. h.,  $F^p C_\bullet = 0$  für  $p < 0$  oder  $n < p$ );
2. die Spektralsequenz liegt in der unteren oder der rechten Halbebene, und zusätzlich gilt  $\lim_r H_*(F^r C_\bullet) = 0$ . Dies bedeutet, dass entweder die Filtrierung nichtpositiv graduiert ist oder  $H_n(F^p C_\bullet) = 0$  für  $n > p$ .

*Beweis.* Zunächst beobachten wir, dass Bedingung (2) immer erfüllt ist, wenn die Spektralsequenz in einer Halbebene konzentriert ist, also insbesondere in den beiden Fällen, die wir im Korollar betrachten. In beiden Fällen leben bei jeder Koordinate  $(p, q)$  aus Dimensionsgründen auch nur endlich viele Differenziale, also ist auch Bedingung (1) erfüllt. Im Fall (1) ist  $F^p C_\bullet = 0$  für  $r < 0$ , also gilt Bedingung (6.4.2) trivialerweise. Im Fall 2 müssen wir noch zeigen, dass  $\lim_{p \rightarrow -\infty}^1 H_*(F^p C_\bullet) = 0$ . Dies ist im Fall der rechten Halbebene klar, denn dann ist  $H_n(F^p C_\bullet) = 0$  für  $p \ll 0$ . Für den Fall der unteren Halbebene betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow Z_{p,q}^r / \ker \xrightarrow{\partial} \operatorname{Im}^{r-1} H_{p+q}(F^p C_\bullet) \xrightarrow{i} \operatorname{Im}^r H_{p+q}(F^{p+1} C_\bullet) \rightarrow 0 \quad (6.4.4)$$

und wenden darauf  $\lim_r$  an. Da  $Z_{**}^r$  schließlich konstant wird (denn es gibt nur endlich viele nicht verschwindende Differenziale), verschwinden seine höheren Limites, und wir erhalten einen Isomorphismus

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^1 \operatorname{Im}^r H_*(F^p C_\bullet) \cong \lim_{r \rightarrow \infty}^1 \operatorname{Im}^r H_*(F^{p+1} C_\bullet),$$

also

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^1 \operatorname{Im}^r D_{p,q} \cong \lim_{r \rightarrow \infty}^1 \operatorname{Im}^r D_{p+1,q-1}.$$

Da für genügend großes  $n$  die Gruppe  $D_{p-n,q+n}$  verschwindet, folgt

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^1 \operatorname{Im}^r H_*(F^p C_\bullet) = 0$$

und damit mit Proposition 6.1.14 die Behauptung.  $\square$

*Beweis des Satzes.* Die exakte Sequenz (6.4.4) liefert im Limes eine Sequenz

$$0 \rightarrow Z_{p,q}^\infty / \ker \xrightarrow{\partial} \operatorname{Im}^\infty H_{p+q}(F^p C_\bullet) \rightarrow \operatorname{Im}^\infty H_{p+q}(F^{p+1} C_\bullet) \rightarrow 0, \quad (6.4.5)$$

wegen Bedingung (1). Andererseits haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \operatorname{im} j / B_{p,q}^\infty \rightarrow Z_{p,q}^\infty / B_{p,q}^\infty = E_{p,q}^\infty \rightarrow Z_{p,q}^\infty / \ker \partial \rightarrow 0, \quad (6.4.6)$$

Die linke Seite ist

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{im} j}{B_{p,q}^\infty} &= \frac{\operatorname{im} j}{j(\cup_r \ker(i^r))} \xleftarrow{j} \frac{H_{p+q}(F^p C_\bullet)}{(\operatorname{im} i + \ker(H_{p+q}(F^p C_\bullet) \rightarrow H_{p+q}(C_\bullet)))} \\ &\cong F^p H_{p+q}(C_\bullet) / F^{p-1} H_{p+q}(C_\bullet) = QF^p H_{p+q}(C_\bullet). \end{aligned}$$

Wir erhalten also durch Zusammensetzen von (6.4.5) und (6.4.6) die folgende Sequenz, die uns  $E^\infty$  mit den Filtrierungsquotienten  $QF^\bullet H_* C_\bullet$  vergleichen lässt:

$$0 \rightarrow QF^p H_{p+q} C_\bullet \rightarrow E_{p,q}^\infty \rightarrow \operatorname{Im}^\infty H_{p+q}(F^p C_\bullet) \rightarrow \operatorname{Im}^\infty H_{p+q}(F^{p+1} C_\bullet) \rightarrow 0. \quad (6.4.7)$$

Aber Lemma 6.1.13 impliziert

$$\lim_p \operatorname{Im}^\infty H_n F^p C_\bullet = \lim_p H_n F^p C_\bullet. \quad (6.4.8)$$

Wir zeigen nun, dass die rechte Seite null ist. Betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow B_n(F^p C_\bullet) \rightarrow Z_n(F^p C_\bullet) \rightarrow H_n(F^p C_\bullet) \rightarrow 0,$$

so folgt aus der langen exakten Sequenz, dass es genügt, zu zeigen, dass

$$\lim_p Z_n(F^p C_\bullet) = 0 = \lim_p^1 B_n(F^p C_\bullet).$$

Dies folgt aber aus der langen exakten Sequenz, die man aus

$$0 \rightarrow Z_n(F^p C_\bullet) \rightarrow F^p C_\bullet \xrightarrow{\partial} B_{n-1}(F^p C_\bullet) \rightarrow 0$$

erhält, der Tatsache, dass  $\lim^1$  rechtsexakt ist, und der Hausdorff- und Vollständigkeitsbedingungen an die Filtrierung. Also haben wir gesehen, dass beide Seiten in (6.4.8) null sind.

Da die Sequenz  $\{\operatorname{Im}^\infty H_n F^p C_\bullet\}_p$  aus Epimorphismen besteht und der Limes verschwindet, folgt  $\operatorname{Im}^\infty H_n F^p C_\bullet = 0$  für alle  $p$ . Also folgt aus (6.4.7), dass

$$E_{p,q}^\infty = QF^p H_{p+q}(C_\bullet)$$

ist, was zu zeigen war.

Es bleibt zu beweisen, dass die Filtrierung  $F^\bullet H_n(C_\bullet)$  erschöpfend, hausdorffsch und vollständig ist. Sie ist erschöpfend, denn

$$H_n(C_\bullet) = H_n(\operatorname{colim}_p F^p C_\bullet) = \operatorname{colim}_p H_n(F^p C_\bullet),$$

denn da der Funktor  $\operatorname{colim}$  exakt ist, vertauscht er mit Homologie.

Definiere analog zu  $\operatorname{Im}^r$  die Sequenz  $\operatorname{Ker}^r$  durch  $(\operatorname{Ker}^r M_\bullet)_n = \ker(f^{r(n)}: M_n \rightarrow M_{n+r(n)})$ .

Betrachte nun die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \operatorname{Ker}^\infty \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet) \rightarrow \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet) \rightarrow F^{p+r} H_k(C_\bullet) \rightarrow 0.$$

Anwendung von  $\lim_r$  liefert die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \operatorname{Ker}^\infty \operatorname{Im}^\infty H_k(F^p C_\bullet) &\rightarrow \operatorname{Im}^\infty H_k(F^p C_\bullet) \rightarrow \lim_r F^r H_k(C_\bullet) \\ &\rightarrow \lim_r^1 \operatorname{Ker}^\infty \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet) \rightarrow \lim_r^1 \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet) \rightarrow \lim_r^1 F^r H_k(C_\bullet) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

## 6 Spektralsequenzen

Wie gesehen ist der zweite Term null. Auch der vorletzte Term verschwindet, denn aus Anwendung von  $\lim^1$  auf (6.4.4) folgt, dass er unabhängig von  $p$  ist; also genügt es, zu zeigen, dass

$$\lim_p \lim_r^1 \operatorname{Im}^r H_n(F^p C_\bullet) = 0.$$

Betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet) \rightarrow H_n(F^p C_\bullet) \rightarrow Q^{p,r} \rightarrow 0, \quad (6.4.10)$$

wobei  $Q$  als der Quotient definiert ist. Anwendung von  $\lim_r$  einerseits liefert die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_k(F^p C_\bullet) \rightarrow \lim_r Q^{p,r} \rightarrow \lim_r^1 \operatorname{Im}^r H_n(F^p C_\bullet) \rightarrow 0,$$

und anschließende Anwendung von  $\lim_p$  liefert

$$0 \rightarrow \lim_p \lim_r Q^{p,r} \rightarrow \lim_p \lim_r^1 \operatorname{Im}^r H_n(F^p C_\bullet) \rightarrow \lim_p^1 H_k(F^p C_\bullet) \stackrel{(6.4.2)}{=} 0$$

also muss gezeigt werden, dass  $\lim_r \lim_p Q^{p,r} = 0$  ist. Die beiden Limites vertauschen (sie sind beide Rechtsadjungierte). Betrachten wir also andererseits die lange exakte Sequenz, die aus (6.4.10) durch anwenden von  $\lim_p$  entsteht, so erhalten wir:

$$0 \rightarrow \lim_p Q^{p,r} \rightarrow \lim_p^1 \operatorname{Im}^r H_n(F^p C_\bullet) \rightarrow 0.$$

Wegen (6.4.2) und Lemma 6.1.13 folgt, dass die rechte und damit die linke Seite verschwinden.

Somit folgt die Vollständigkeit. Die Hausdorff-Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass der erste Term in der zweiten Zeile von (6.4.9) verschwindet. Da der letzte Term der ersten Zeile nicht von  $p$  abhängt, können wir äquivalent zeigen, dass die Bedingung über kreuzende Differenziale impliziert, dass

$$W = \operatorname{colim}_p \lim_r^1 \operatorname{Ker}^\infty \operatorname{Im}^r H_n(F^p C_\bullet) = 0.$$

Dazu benötigen wir zwei Lemmas.

**Lemma 6.4.11.** *Es gilt*

$$\frac{\operatorname{Ker}^n \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet)}{\operatorname{Ker}^n \operatorname{Im}^{r+1} H_k(F^p C_\bullet) + \operatorname{Ker}^{n-1} \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet)} \cong \operatorname{im}(d^{n+r}: E_{p+n,?}^{n+r} \rightarrow E_{p-r,?}^{n+r}).$$

*Beweis.* Wenden wir  $i^{n-1}$  auf die linke Seite an, erhalten wir einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Ker}^n \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet)}{\operatorname{Ker}^n \operatorname{Im}^{r+1} H_k(F^p C_\bullet) + \operatorname{Ker}^{n-1} \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet)} &\xrightarrow{i^{n-1}} \frac{\operatorname{Ker}^1 \operatorname{Im}^{r+n-1} H_k(F^{p+n-1} C_\bullet)}{\operatorname{Ker}^1 \operatorname{Im}^{r+n} H_k(F^{p+n-1} C_\bullet)} \\ &= Z(E^{n+r})/Z(E^{n+r+1}) \cong B(E^{n+r+1})/B(E^{n+r}). \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 6.4.12.** *Es gibt eine Surjektion*

$$\operatorname{colim}_n \lim_r^1 \frac{\operatorname{Ker}^\infty \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet)}{\operatorname{Ker}^n \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet)} \rightarrow W.$$

**Bemerkung 6.4.13.** *In der Tat ist die Abbildung ein Isomorphismus, was wir aber hier nicht benötigen.*

*Beweis.* Wir wenden den rechtsexakten Funktor  $\operatorname{colim}_n \lim_r^1$  an auf die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \operatorname{Ker}^n \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet) \rightarrow \operatorname{Ker}^\infty \operatorname{Im}^r H_k(F^p C_\bullet) \rightarrow \operatorname{Ker}^\infty \operatorname{Im}^{r+n} H_k(F^{p+n} C_\bullet) \rightarrow 0. \quad \square$$

Seien nun  $u_0$  und  $v_0$  so gewählt, dass die Bedingung über kreuzende Differenziale erfüllt ist für  $u \geq u_0$  und  $v \geq v_0$ . Wir setzen nun in Lemma 6.4.11

$$p = u_0 - 1, \quad n = u - u_0 + 1, \quad r = v + u_0 - 1.$$

Da die rechte Seite null ist für  $n \geq 1$  und  $r \geq u_0 + v_0 - 1$ , folgt für diese  $n, r$ :

$$\operatorname{Ker}^n \operatorname{Im}^r H_{p+q}(F^p C_\bullet) = \operatorname{Ker}^n \operatorname{Im}^{r+1} H_{p+q}(F^p C_\bullet) + \operatorname{Ker}^{n-1} \operatorname{Im}^r H_{p+q}(F^p C_\bullet).$$

Daraus folgt per Induktion

$$\operatorname{Ker}^n \operatorname{Im}^r H_{p+q}(F^p C_\bullet) = \operatorname{Ker}^n \operatorname{Im}^{r+1} H_{p+q}(F^p C_\bullet) \text{ für } r \gg 0,$$

also ist die Sequenz Mittag-Lefflersch in  $r$ , und der  $\lim^1$ -Term in Lemma 6.4.12 verschwindet. Also ist auch  $W = 0$ , und der Beweis des Satzes ist vollständig.  $\square$

### 6.4.1 Absteigende Filtrierungen

Oft gerät man in Situationen, in denen man keine natürlich gegebene aufsteigende Filtrierung hat, sondern eine absteigende. Ist zum Beispiel  $F^\bullet C_\bullet$  eine gewöhnliche aufsteigende Filtrierung eines Kettenkomplexes, so erhält man nach Anwendung von Kohomologie eine absteigende Filtrierung  $F_n H^*(C_\bullet) = \ker(H^*(C_\bullet) \rightarrow H^*(F^n C_\bullet))$ . In diesem Fall erhält man eine ähnliche Konvergenzaussage wie im vorigen Abschnitt:

**Satz 6.4.14.** *Sei  $F^\bullet C_\bullet$  eine hausdorffsche und erschöpfende Filtrierung eines Kettenkomplexes in  $\operatorname{Mod}_R$  und  $E_*^{**}$  die zugehörige Spektralsequenz mit  $E_1$ -Term*

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(QF^p C_\bullet).$$

*Die Bedingungen (1) und (2) aus Satz 6.4.1 seien erfüllt. Dann ist die Filtrierung  $F_n H^*(C_\bullet)$  vollständig,  $H^*(C_\bullet) = \lim F_n H^*(C_\bullet)$  und  $\operatorname{colim} F_n H^*(C_\bullet) = 0$ , und*

$$E_\infty^{p,q} = QF_p H^{p+q}(C_\bullet).$$

Man beachte, dass die konditionelle Konvergenzbedingung verschwunden ist; also ist die Konvergenz hier etwas leichter sicherzustellen. Wir wollen den Beweis dieses Satzes hier nicht führen, da er recht ähnlich zu dem Beweis von Satz 6.4.1 ist.

## 6.5 Die Spektralsequenz eines Doppelkomplexes

Als erste Anwendung betrachten wir einen Doppelkomplex  $C_{\bullet\bullet}$  und stellen die Frage, wie wir die Homologie von  $|C|$  und von  $\text{Tot } C$  aus dem Wissen über die Homologiegruppen der Spalten und der Zeilen herleiten können.

**Satz 6.5.1.** *Sei  $C_{\bullet\bullet}$  ein Doppelkomplex. Dann gibt es eine Spektralsequenz*

$$E_{p,q}^2 = H_p^h(H_q^v(C_{\bullet\bullet})) \implies H_{p+q}|C|,$$

wobei  $H_*^h$  die Homologie bezüglich der horizontalen und  $H_*^v$  bezüglich der vertikalen Differenziale bezeichnet.

Oft beginnt eine Spektralsequenz überhaupt erst bei  $E_2$ ; hier gibt es auch einen  $E_1$ -Term, den wir im Beweis bestimmen werden. Wir machen keinerlei Aussage über die Konvergenzeigenschaften; diese müssen getrennt überprüft werden.

*Beweis.* Wir filtrieren den Totalkomplex  $|C|$  durch

$$F^p|C|_n = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i \leq p}} C_{ij}.$$

Dies ist offensichtlich eine aufsteigende, erschöpfende und hausdorffsche Filtrierung und liefert daher eine Spektralsequenz mit

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(QF^p|C|) \cong H_{p+q}(C_{p,q}[p]) = H_q(C_{p,\bullet}).$$

Das Differenzial  $d^1: H_q(C_{p,\bullet}) \rightarrow H_q(C_{p-1,\bullet})$  ist induziert von dem horizontalen Differenzial in  $C_{\bullet\bullet}$ ; also ergibt sich

$$E_{p,q}^2 = H_p^h H_q^v(C_{\bullet\bullet}),$$

wie behauptet. □

**Bemerkung 6.5.2.** *In Lemma 3.5.8 haben wir schon einen sehr speziellen Fall dieser Spektralsequenz hergeleitet; dort nahmen wir an, dass  $C_{\bullet\bullet}$  in der rechten Halbebene konzentriert war (was Konvergenz sicherstellt) und zeigten, dass aus  $H_*^v C_{\bullet\bullet} = 0$  folgt, dass  $H_*|C| = 0$ . Die folgt natürlich auch sofort aus der Beschreibung von  $E^2$ .*

Wir schließen dieses Kapitel mit einigen Anwendungen der Spektralsequenz eines Doppelkomplexes.

**Satz 6.5.3.** *Sei  $F: \text{Mod}_R \rightarrow \mathcal{C}$  ein rechtsexakter Funktor und  $M_{\bullet} \rightarrow M$  eine Auflösung durch nicht notwendig projektive Objekte  $M_i$ , für die  $L_n F(M_i) = 0$  für alle  $i$  und  $n > 0$ . Dann ist  $L_n F(M) = H_n(F(M_{\bullet}))$ .*

Das heißt, abgeleitete Funktoren lassen sich aus  $F$ -azyklischen Auflösungen berechnen, nicht notwendig nur projektiven.

## 6.5 Die Spektralsequenz eines Doppelkomplexes

*Beweis.* Sei  $P_{i,\bullet} \rightarrow M_i$  eine projektive Auflösung. Dann ist  $|P_{\bullet\bullet}| \rightarrow M$  eine projektive Auflösung und  $F(P_{\bullet\bullet})$  ein Doppelkomplex. Also ist  $L_n F(M) = H_n |F(P_{\bullet\bullet})|$ . Die Spektralsequenz des Doppelkomplexes ist im ersten Quadranten konzentriert, konvergiert also, und

$$E_{pq}^2 = H_p^h H_q^v F(P_{\bullet\bullet}) \Rightarrow H_{p+q} |F(P_{\bullet\bullet})|.$$

Aber

$$H_q^v F(P_{p\bullet}) = L_q F(M_p) = \begin{cases} F(M_p); & q = 0 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist der  $E^2$ -Term auf der  $q = 0$ -Linie konzentriert, und die Spektralsequenz kollabiert bei  $E^2$  und liefert den Isomorphismus  $H_n F(M_\bullet) = H_n |F(P)|$ .  $\square$

**Satz 6.5.4** (Grothendieck-Spektralsequenz, homologischer Fall). *Seien  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  Funktoren zwischen abelschen Kategorien mit genug projektiven, so dass  $G$  rechtsexakt ist und die abgeleiteten Funktoren von  $G$  auf  $F(P)$  für projektive Objekten  $P$  verschwinden. Dann gibt es eine Spektralsequenz*

$$E_{p,q}^2 = L_p G(L_q F(M)) \Rightarrow L_{p+q} (G \circ F)(M).$$

*Beweis.* Sei  $Q_\bullet \rightarrow M$  eine projektive Auflösung von  $M$  und  $P_{i,\bullet}$  eine solche von  $F(Q_i)$ .

Wir betrachten zunächst die Spektralsequenz mit

$$E_{p,q}^2 = H_p^h H_q^v G(P_{\bullet\bullet}) = H_p(L_q G)(F(Q_\bullet)) \Longrightarrow H_{p+q} |G(P_{\bullet\bullet})|.$$

Da  $Q_i$  projektiv ist, ist  $F(Q_i)$  nach Annahme  $G$ -azyklisch, also ist

$$E_{p,q}^2 = \begin{cases} H_p(G(F(Q_\bullet))) = L_p(G \circ F)(M); & q = 0 \\ 0; & q > 0. \end{cases}$$

Also kollabiert die Spektralsequenz und liefert

$$H_n |G(P_{\bullet\bullet})| \cong L_n(G \circ F)(M).$$

Es gibt nun aber eine zweite, „verdrehte“, Spektralsequenz, die gegen das gleiche Ziel konvergiert, mit

$$E_{p,q}^2 = H_p^v H_q^h G(P_{\bullet\bullet});$$

diesen  $E^2$ -Term möchten wir mit  $L_p G(L_q F(M))$  identifizieren, was dann den Beweis des Satzes vervollständigt.

Um dies zu tun, müssen wir  $P_{\bullet\bullet}$  noch etwas spezieller wählen, nämlich als Cartan-Eilenberg-Auflösung:

**Definition.** Sei  $C_\bullet$  ein Kettenkomplex. Eine *Cartan-Eilenberg-Auflösung* von  $C_\bullet$  ist ein Doppelkomplex  $P_{\bullet\bullet}$  mit Abbildungen  $P_{i\bullet} \rightarrow C_i$ , so dass  $P_{i\bullet} \rightarrow C_i$ ,  $B_i(P_{\bullet\bullet}) \rightarrow B_i(C_\bullet)$  und  $H_i(P_{\bullet\bullet}) \rightarrow H_i(C_\bullet)$  projektive Auflösungen sind.

## 6 Spektralsequenzen

**Übung:** Zeige, dass Cartan-Eilenberg-Auflösungen immer existieren.

Sei nun also  $P_{\bullet\bullet} \rightarrow F(Q_{\bullet})$  eine CE-Auflösung. Dann gilt

$$G(Z_{pq}/B_{pq}) = G(Z_{pq})/G(B_{pq}),$$

denn der Monomorphismus  $B_{pq} \rightarrow Z_{pq}$  zerfällt.

Da die Sequenz  $0 \rightarrow B_i(P_{\bullet\bullet}) \rightarrow Z_i(P_{\bullet\bullet}) \rightarrow H_i(P_{\bullet\bullet}) \rightarrow 0$  zerfällt, weil die Homologiegruppen projektiv sind, ist der  $E^2$ -Term der Spektralsequenz des Doppelkomplexes  $G(P_{\bullet\bullet})$  gegeben durch

$$E_{p,q}^2 = H_p^v(H_q^h(G(P_{\bullet\bullet}))) = H_p^v(G(H_q^h(P_{\bullet\bullet}))) = L_p G(L_q F(M)). \quad \square$$

## 6.6 Anwendungen und Beispiele

### 6.6.1 Universelle Koeffizienten

Als erste Anwendung von Satz 6.5.4 betrachten wir zwei Ringe  $R \rightarrow S$ , einen  $S^{\text{op}}$ -Modul  $K$ , und dazu die Funktoren

$$F(M) = S \otimes_R M: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Mod}_S \quad \text{und} \quad G(N) = K \otimes_S N: \text{Mod}_S \rightarrow \text{Ab}.$$

Offensichtlich ist  $(G \circ F)(M) = K \otimes_R M$ . Alle Funktoren sind linksexakt, und wenn  $P \in \text{Mod}_R$  projektiv ist, so ist  $F(P)$  als  $S$ -Modul projektiv und daher  $G$ -azyklisch. Also gibt es eine Grothendieck-Spektralsequenz

$$E_{p,q}^2 = \text{Tor}_p^S(K, \text{Tor}_q^R(S, M)) \implies \text{Tor}_{p+q}(K, M). \quad (6.6.1)$$

Betrachten wir den Spezialfall  $S = \mathbf{Z}$ , so hat die Spektralsequenz nur zwei Spalten, da  $\text{Tor}_p^{\mathbf{Z}} = 0$  für  $p \geq 2$ . Also erhalten wir in diesem Fall eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow K \otimes_S \text{Tor}_q^R(S, M) \rightarrow \text{Tor}_q^R(K, M) \rightarrow \text{Tor}_1(K, \text{Tor}_{q-1}^R(S, M)) \rightarrow 0.$$

Spezialisieren wir uns weiter auf den Fall  $R = \mathbf{Z}[G]$  und  $M = \mathbf{Z}$  für eine Gruppe  $G$ , so erhalten wir die *universelle Koeffizientensequenz*

$$0 \rightarrow H_q(G) \otimes K \rightarrow H_q(G; K) \rightarrow \text{Tor}_1(H_{q-1}(G); K) \rightarrow 0. \quad (6.6.2)$$

**Beispiel 6.6.3.** Wir berechnen die Homologiegruppe  $H_*(\Sigma_3; \mathbf{F}_3)$  aus unserem Wissen über  $H_*(\Sigma_3; \mathbf{Z})$  aus Beispiel 4.4.11:

$$H_q(\Sigma_3; \mathbf{F}_3) \cong \begin{cases} H_q(\Sigma_3) \otimes \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_3; & \text{falls } q = 0 \text{ oder } q \equiv 3 \pmod{4} \\ \text{Tor}(H_{q-1}(\Sigma_3), \mathbf{F}_3) = \mathbf{F}_3; & \text{falls } q \equiv 0 \pmod{4} \\ 0; & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir können aber auch  $F$  als  $F^{\text{op}}$  wie am Anfang des Abschnittes wählen und  $G$  als

$$G(N) = \text{Hom}_S(N, K): \text{Mod}_S^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}.$$

Da wir in den oppositionellen Kategorien arbeiten, sind nun  $F$  und  $G$  linksexakt, und  $F(P)$  ist  $G$ -azyklisch für  $P \in \text{Mod}_R^{\text{op}}$  injektiv (d. h.  $P$  projektiv). Es gilt

$$(G \circ F)(M) = \text{Hom}_S(S \otimes_R M, K) = \text{Hom}_R(M, K),$$

und es gibt eine analoge (kohomologische) Grothendieck-Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_S^p(\text{Tor}_q^R(S, M), K) \implies \text{Ext}_R^{p+q}(M, K).$$

Insbesondere haben wir im Spezialfall der Gruppenkohomologie wiederum eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_{q-1}(G), K) \rightarrow H^q(G; K) \rightarrow \text{Hom}(H_q(G), K) \rightarrow 0,$$

die es erlaubt, aus der Homologie die Kohomologie zu berechnen.

**Beispiel 6.6.4.** Wir berechnen die ganzzahlige Kohomologie von  $\Sigma_3$ :

$$H^q(\Sigma_3; \mathbf{Z}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}; & q=0 \\ \mathbf{Z}/2; & n \equiv 2 \pmod{4} \\ \mathbf{Z}/6; & n > 0, n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

### 6.6.2 Künneth-Spektralsequenzen

Die folgende Spektralsequenz leiten wir aus der Spektralsequenz eines Doppelkomplexes her.

**Satz 6.6.5** (Künneth). *Seien  $M_\bullet \in \text{Ch}_{R^{\text{op}}}$ ,  $N_\bullet \in \text{Ch}_R$ , so dass  $M_i$  für alle  $i$  flach als  $R^{\text{op}}$ -Modul ist. Dann gibt es eine Spektralsequenz*

$$E_{p,q}^2 = \bigoplus_{s+t=q} \text{Tor}_p^R(H_s(M_\bullet), H_t(N_\bullet)) \implies H_{p+q}(|M_\bullet \otimes_R N_\bullet|).$$

*Beweis.* Wir wählen eine CE-Auflösung  $P_{i\bullet} \rightarrow N_i$  und betrachten den Tripelkomplex

$$C_{stq} = M_s \otimes_R P_{t,q}.$$

Daraus erhalten wir den Doppelkomplex  $C_{pq} = |C_{\bullet\bullet q}|$ .

Um die Homologie dieses Komplexes zu berechnen, bemühen wir die Spektralsequenz

$$E_{p,q}^2 = H_p^h(H_q^v(C_{\bullet\bullet})) \implies H_{p+q}|C_{\bullet\bullet}|.$$

Da  $M_i$  flach ist, folgt aus der universellen Koeffizientensequenz, dass

$$H_q\left(\bigoplus_{s+t=p} M_s \otimes_R P_{t\bullet}\right) = \bigoplus M_s \otimes_R H_q(P_{t\bullet}) = \bigoplus M_s \otimes_R N_t \quad (q = 0),$$

## 6 Spektralsequenzen

und damit

$$E_{p,q}^2 = H_p |M_\bullet \otimes_R N_\bullet| \quad \text{für } q = 0 \text{ und } 0 \text{ für } q > 0,$$

also konvergiert auch die Spektralsequenz

$$E_{p,q}^2 = H_p^v(H_q^h(C_{\bullet\bullet})) \implies H_{p+q} |M_\bullet \otimes_R N_\bullet|.$$

Die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow Z_t P_{\bullet,p} \rightarrow P_{t,p} \rightarrow B_{t-1} P_{\bullet,p} \rightarrow 0$$

zerfällt, denn  $BP_{\bullet,p}$  ist projektiv für alle  $p$ ; also bleibt die Sequenz kurz und exakt, wenn man mit  $M_\bullet$  tensoriert und Totalkomplexe nimmt. In der Homologie ergibt sich damit eine lange exakte Sequenz

$$\overset{0}{\rightarrow} H_q |M_\bullet \otimes B_\bullet P_{\bullet,p}| \rightarrow H_q |M_\bullet \otimes Z_\bullet P_{\bullet,p}| \rightarrow H_q |M_\bullet \otimes P_{\bullet,p}| \overset{0}{\rightarrow} H_{q-1} |M_\bullet \otimes B_\bullet P_{\bullet,p}| \rightarrow \dots,$$

und daher erhält man Isomorphismen

$$|H_\bullet(M_\bullet) \otimes H_\bullet(P_{\bullet,p})| \cong H_\bullet |M_\bullet \otimes P_{\bullet,p}| \cong H_\bullet^h(C_{\bullet\bullet}).$$

Da  $H_t^h(P_{\bullet\bullet})$  eine projektive Auflösung von  $H_t(N_\bullet)$  ist, folgt, dass

$$E_{p,q}^2 = \bigoplus_{s+t=q} H_p^v(H_s(M_\bullet) \otimes H_t(P_{\bullet,p})) = \bigoplus_{s+t=q} \text{Tor}_p^R(H_s(M_\bullet), H_t(N_\bullet)),$$

womit der Satz gezeigt ist. □

**Korollar 6.6.6.** *Ist  $R$  ein Hauptidealring,  $M_\bullet \in \text{Ch}_{R^{\text{op}}}$ ,  $N_\bullet \in \text{Ch}_R$ , so gibt es eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow |H_*(M_\bullet) \otimes_R H_*(N_\bullet)|_n \rightarrow H_n |M_\bullet \otimes_R N_\bullet| \rightarrow \bigoplus_{s+t=n-1} \text{Tor}_1^R(H_s(M_\bullet), H_t(N_\bullet)) \rightarrow 0.$$

*Ist  $R$  ein Körper (oder allgemeiner  $H_*(N_\bullet)$  flach über  $R$ ), so gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$|H_*(M_\bullet) \otimes_R H_*(N_\bullet)|_n \cong H_* |M_\bullet \otimes_R N_\bullet|.$$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus der Künneth-Spektralsequenz, denn  $\text{Tor}_i$  ist in diesem Fall null für  $i > 1$ . □

**Beispiel 6.6.7.** Wir betrachten die Homologie der Gruppe  $C_p \otimes C_p$  mit Koeffizienten in dem Körper  $\mathbf{F}_p$ . Nach dem Korollar gilt

$$H_n(C_p \otimes C_p; \mathbf{F}_p) = |H_*(C_p; \mathbf{F}_p) \otimes H_*(C_p; \mathbf{F}_p)|_n \cong \mathbf{F}_p^{n+1}.$$

## 6.6 Anwendungen und Beispiele

Die Gruppenhomologie mit ganzzahligen Koeffizienten ist etwas komplizierter; hier haben wir eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & |H_*(C_p) \otimes H_*(C_p)|_n & \longrightarrow & H_n(C_p \otimes C_p) & \longrightarrow & \bigoplus_{s+t=n-1} \text{Tor}_1(H_s(C_p) \otimes H_t(C_p)) & \longrightarrow 0 \\
 & \parallel & & & & \parallel & \\
 & \begin{cases} \mathbf{Z}; & n = 0 \\ (\mathbf{Z}/p)^2; & 2 \nmid n \\ (\mathbf{Z}/p)^{\frac{n}{2}}; & 2 \mid n \end{cases} & & & & \begin{cases} (\mathbf{Z}/p)^{\frac{n-1}{2}}; & 2 \nmid n \\ 0; & 2 \mid n \end{cases} & & 
 \end{array}$$

Also ist

$$H_n(C_p \otimes C_p) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}; & n = 0 \\ (\mathbf{Z}/p)^{\frac{n+3}{2}}; & 2 \nmid n \\ (\mathbf{Z}/p)^{\frac{n}{2}}; & 2 \mid n, n \neq 0. \end{cases}$$

Andererseits lässt sich diese Homologie auch induktiv aus der universellen Koeffizientensequenz herleiten:

$$0 \rightarrow H_n(C_p \times C_p) \otimes \mathbf{F}_p \rightarrow H_n(C_p \times C_p; \mathbf{F}_p) \rightarrow \text{Tor}_1(H_{n-1}(C_p \times C_p), \mathbf{F}_p) \rightarrow 0.$$

## 7 Die Hochschild-Lyndon-Serre-Spektralsequenz

Die Hochschild-Lyndon-Serre-Spektralsequenz (kurz: Serre-Spektralsequenz) erlaubt es uns, aus dem Wissen über die Homologie oder Kohomologie eines Normalteilers  $N$  einer Gruppe  $G$  und des Quotienten  $G/N$  die Homologie oder Kohomologie von  $G$  auszurechnen; ebenso lässt sich oft durch indirekte Argumente aus  $H_*(N)$  und  $H_*(G)$  auf  $H_*(G/N)$  schließen, und auch von  $H_*(G)$  und  $H_*(G/N)$  auf  $H_*(H)$ . Diese Spektralsequenz ist so wichtig, dass sie in einem eigenen Kapitel behandelt wird.

### 7.1 Konstruktion und Beispiele

Wir konstruieren die Serre-Spektralsequenz als Spezialfall der Grothendieck-Spektralsequenz. Sei  $\Gamma$  eine Gruppe mit Normalteiler  $N$  und Quotient  $Q = G/N$ . Betrachte die Koinvarianten-Funktoren

$$F: \text{Mod}_\Gamma \rightarrow \text{Mod}_Q; \quad F(M) = M_N$$

und

$$G: \text{Mod}_Q \rightarrow \text{Ab}; \quad G(M) = M_Q.$$

Der erste Funktor liefert tatsächlich auf natürliche Weise einen  $Q$ -Modul, denn die  $\Gamma$ -Operation auf  $M_N$  ist, auf  $N$  eingeschränkt, trivial. Offensichtlich ist  $G(F(M)) = M_\Gamma$ ; ferner sind beide Funktoren rechtsexakt. Falls  $P$  ein freier  $\mathbf{Z}[\Gamma]$ -Modul ist, also  $P = \mathbf{Z}[\Gamma] \otimes A$  für eine freie abelsche Gruppe  $A$ , so ist  $F(P) = \mathbf{Z}[Q] \otimes A$ , also ein freier  $Q$ -Modul; da projektive Moduln direkte Summanden in freien Moduln sind und Koinvariantenbildung direkte Summen erhält, folgt, dass  $F$  projektive  $\Gamma$ -Moduln auf projektive und damit  $G$ -azyklische  $Q$ -Moduln wirft. Also sind die Bedingungen der Grothendieck-Spektralsequenz 6.5.4 erfüllt und wir erhalten:

**Satz 7.1.1.** *Sei  $\Gamma$  eine Gruppe mit Normalteiler  $N$  und Quotient  $Q$ , und sei  $M$  ein  $\Gamma$ -Modul. Dann gibt es konvergente Spektralsequenzen*

$$E_{p,q}^2 = H_p(Q; H_q(N; M)) \implies H_{p+q}(\Gamma; M)$$

und

$$E_2^{p,q} = H^p(Q; H^q(N; M)) \implies H^{p+q}(\Gamma; M).$$

Hierbei hat  $H^q(N; M)$  die natürliche induzierte Struktur eines  $Q$ -Moduls.

## 7.1 Konstruktion und Beispiele

Der zweite Teil des Satzes ist die kohomologische Variante und eine direkte Dualisierung der Konstruktion.

**Bemerkung 7.1.2.** Ist  $N$  eine zentrale abelsche Untegruppe von  $G$ , so ist  $H_q(N; M)$  ein trivialer  $Q$ -Modul, und  $H_p(Q; H_q(N; M))$  kann mit der universellen Koeffizientensequenz (6.6.2) berechnet werden. Ist außerdem  $M$  ein  $k[G]$ -Modul für einen endlichen Körper  $k$  oder  $k = \mathbf{Q}$ , so vereinfacht sich der  $E^2$ -Term zu

$$E_{p,q}^2 = H_p(Q; k) \otimes H_q(N; M).$$

Nach dem Künneth-Satz ist  $H_*(G; k) \cong |H_*(Q; k) \otimes H_*(N; k)| = |E_{**}^2|$ , falls  $G = Q \otimes N$ , falls also die Erweiterung trivial ist. Die Serre-Spektralsequenz kann man also als eine Verallgemeinerung auffassen, die den Übergang von trivialen zu nichttrivialen Gruppenerweiterungen erklärt.

**Beispiel 7.1.3.** Wir betrachten die Gruppenerweiterung

$$1 \rightarrow C_3 \rightarrow \Sigma_3 \rightarrow C_2 \rightarrow 1,$$

wobei  $\Sigma_3$  die symmetrische Gruppe der Ordnung 6 ist. Deren Homologie haben wir schon in Beispiel 4.4.11 berechnet, und wir wollen nun nachvollziehen, was in der Serre-Spektralsequenz geschieht. Wir haben dort gesehen, dass  $C_2$  auf  $H_{2n-1}(C_3) = \mathbf{Z}/3$  genau dann trivial operiert, falls  $n$  gerade ist. Also erhalten wir

$$E_{p,q}^2 = H_p(C_2; H_q(C_3)) = \begin{cases} \mathbf{Z}; & \text{falls } p = q = 0; \\ \mathbf{Z}/2; & \text{falls } q = 0 \text{ und } p \text{ ungerade} \\ \mathbf{Z}/3; & \text{falls } p = 0 \text{ und } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

10	$\mathbf{Z}/3$									
8										
6	$\mathbf{Z}/3$									
4										
2	$\mathbf{Z}/3$									
0	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/2$								
	0	2	4	6	8	10				

Dies kann man grafisch wie folgt darstellen:

## 7 Die Hochschild-Lyndon-Serre-Spektralsequenz

Aus Dimensionsgründen können keine Differenziale auftreten, und  $E^2 = E^\infty$ ; ebenso sind alle Erweiterungen notwendig trivial. Wir erhalten also eine neue Berechnung der Homologie von  $\Sigma_3$  ohne Benutzung von Transferabbildungen.

**Beispiel 7.1.4** (die diskrete Heisenberggruppe). Sei  $G$  die Gruppe der oberen  $3 \times 3$ -Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen und ganzzahligen Einträgen. Diese Gruppe wird erzeugt von den drei Elementen

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei  $c$  zentral ist. Die von  $c$  erzeugte Untergruppe ist also ein zentraler Normalteiler isomorph zu  $\mathbf{Z}$ , und  $G$  lässt sich als eine Erweiterung  $1 \rightarrow \mathbf{Z}\{c\} \rightarrow G \rightarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow 1$  schreiben. Der  $E^2$ -Term der zugehörigen homologischen Spektralsequenz sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{c} 2 \\ \mathbf{Z}c \quad \mathbf{Z}^2 \quad \mathbf{Z} \\ 0 \\ \mathbf{Z}1 \quad \mathbf{Z}^2 \quad \mathbf{Z}z \\ 0 \quad 2 \end{array}$$

Es gibt ein einziges mögliches Differenzial, nämlich  $d^2(z) = \lambda c$  für ein  $\lambda \in \mathbf{Z}$ . Welchen Wert  $\lambda$  hier annimmt, bestimmen wir durch ein indirektes Argument. Wir wissen, dass  $H_1(G; \mathbf{Z}) = G_{\text{ab}}$  die Abelisierung von  $G$  ist. Da aber  $c = [e, f]$  ist, ist  $G_{\text{ab}} = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ . Da  $|E_{\bullet\bullet}^\infty|_1 = \mathbf{Z}^2 \oplus \mathbf{Z}/\lambda$ , folgt, dass  $\lambda = \pm 1$  sein muss. Also bricht die Spektralsequenz bei folgendem  $E_3$ -Term zusammen:

$$\begin{array}{c} 2 \\ \mathbf{Z}^2 \quad \mathbf{Z} \\ 0 \\ \mathbf{Z} \quad \mathbf{Z}^2 \\ 0 \quad 2 \end{array}$$

und wir erhalten (ohne Erweiterungsprobleme)

$$H_0(G) = \mathbf{Z}; H_1(G) = \mathbf{Z}^2; H_2(G) = \mathbf{Z}^2; H_3(G) = \mathbf{Z}.$$

## 7.2 Multiplikatивität

In diesem Abschnitt führen wir das Konzept der Spektralsequenz in dem hier behandelten Beispiel der Serre-Spektralsequenz mit dem Konzept von Kettenalgebren zusammen. Das wichtigste Resultat ist folgendes:

**Definition.** Eine Filtrierung  $F^\bullet A$  einer Kettenalgebra  $A$  ist *multiplikativ*, falls  $(F^i A)(F^j A) \subseteq F^{i+j} A$ .

**Satz 7.2.1.** Die Serre-Spektralsequenz für die Kohomologie einer Gruppe  $G$  mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring  $R$  ist eine Spektralsequenz von kommutativen Kettenalgebren. Das heißt,  $(E_k, d_k)$  ist eine kommutative Kettenalgebra, und  $E_{k+1} = H_*(E_k, d_k)$  als Algebren. Außerdem ist die induzierte Filtrierung auf  $H^*(G; R)$  multiplikativ, und  $E_\infty \cong QF^\bullet H_*(G)$  als graduiert-kommutative Algebren.

Hierbei hat  $E_2^{p,q} = H^p(Q; H^q(N; R))$  die natürliche Kettenalgebrastruktur eine Kohomologiealgebra.

Zum Beweis dieses Satzes müssen wir die multiplikativen Strukturen durch die ganze Konstruktion der Spektralsequenz verfolgen. Zunächst beobachten wir:

**Definition.** Nennen wir ein exaktes Tripel  $(D, E, i, j, k)$  *multiplikativ*, falls

1.  $D$  und  $E$  Algebren sind;
2.  $j: D \rightarrow E$  ein Algebrenmorphismus ist;
3.  $i(y_1 y_2) = y_1 i(y_2) = i(y_1) y_2$  für  $y_i \in D$  gilt;
4.  $k(xj(y)) = k(x)y$  und  $k(j(y)x) = (-1)^{|y|} yk(x)$  für  $x \in E, y \in D$  gilt;
5. es für jedes  $n \geq 0, x_1, x_2 \in E, y_1, y_2 \in D$  mit  $k(x_i) = i^n(y_i)$  ein  $y \in D$  gibt, so dass  $k(x_1 x_2) = i^n(y)$  und  $j(y) = j(y_1)x_2 + (-1)^{|x_1|} x_1 j(y_2)$  gilt.

**Lemma 7.2.2.** Das abgeleitete Tripel eines multiplikativen Tripels ist wieder multiplikativ.

*Beweis.* Zunächst besagt Bedingung (5) für  $n = 0$ , dass

$$d(x_1 x_2) = j(k(x_1 x_2)) = j(c) = j(k(x_1))x_2 \pm x_1 j(k(x_2)) = d(x_1)x_2 \pm x_1 d(x_2),$$

also ist  $d$  eine Derivation, mithin  $E'$  wieder eine Algebra.

Wir definieren auf  $D' = i(D)$  eine assoziative Multiplikation durch  $i(y_1)i(y_2) = i(y_1 y_2)$ ; damit wird auch  $D'$  zu einer Algebra, und (1) ist für  $D', E'$  gezeigt. Da  $i'$  die Einschränkung von  $i$  auf  $D'$  ist, folgt (3). Ebenso folgt Axiom (2) unmittelbar aus der Definition von  $j'$  und der Multiplikation auf  $D'$ .

Wir zeigen (4): sei  $x' \in E'$  repräsentiert durch den Zykel  $x$  und  $y' = i(y) \in D'$ . Dann gilt:

$$k'(x'j'(y')) = k(xj(y)) \stackrel{(4)}{=} k(x)y = k'(x') * y',$$

wobei hier  $*$  die neue Multiplikation auf  $D'$  bezeichnet. Die zweite Gleichung in (4) folgt symmetrisch.

Schließlich zeigen wir, dass Bedingung (5) für  $(D, E)$  und ein  $n + 1$  äquivalent ist zu Bedingung (5) für  $(D', E')$  und  $n$ . Seien  $x'_1, x'_2 \in E'$  repräsentiert durch  $x_1, x_2 \in E$  und  $y'_1, y'_2 \in D'$  mit  $i(y_i) = y'_i$  so dass  $k'(x'_i) = i^n(y'_i)$  gilt. Da  $k'(x'_i) = k(x_i)$  und  $i^n(y'_i) = i^{n+1}(y_i)$  gilt, gibt es nach Voraussetzung ein  $y \in D$  mit  $k(x_1 x_2) = i^{n+1}y$  und  $j(y) = j(y_1)x_2 \pm x_1 j(y_2)$ . Setzen wir  $y' = i(y) \in D'$ , so erhalten wir

$$h'(x'y') = h(xy) = i^{n+1}y = i^n y'$$

und

$$j'(y') = [j(y)] = [j(y_1)x_2 \pm x_1 j(y_2)] = j'(y'_1)x'_2 \pm x'_1 j'(y'_2). \quad \square$$

## 7 Die Hochschild-Lyndon-Serre-Spektralsequenz

Hieraus folgt unmittelbar:

**Korollar 7.2.3.** *Die Spektralsequenz zu einem multiplikativen exakten Tripel ist eine Spektralsequenz von Kettenalgebren.*

**Lemma 7.2.4.** *Sei  $F^\bullet A_\bullet$  eine multiplikative Filtrierung einer dga  $A$ . Dann ist das zugehörige exakte Tripel multiplikativ.*

*Beweis.* Wir erinnern uns, dass  $D = \bigoplus_{p,q} H_{p+q}(F^p A_\bullet)$  und  $E = \bigoplus_{p,q} H_{p+q}(QF^p A_\bullet)$ . Beides sind auf natürliche Weise Algebren. Die Abbildung  $j: H_*(F^p A_\bullet) \rightarrow H_*(QF^p A_\bullet)$  ist eine Algebrenabbildung, und Bedingung (3) ist ebenfalls trivialerweise erfüllt. Für Bedingung (4) müssen wir die Definition des Verbindungshomomorphismus rekapitulieren: Ist  $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen und  $x \in H_n(C'')$ , so wähle einen darstellenden Zykel von  $x$  in  $C''$  und ein Urbild  $\tilde{x} \in C_n$  davon. Dies ist nicht notwendig ein Zykel, aber  $d(\tilde{x}) \in Z_{n-1}(C')$  und repräsentiert  $\partial(x)$ .

Sei nun  $x \in Z_i(QF^m A_\bullet)$  und  $y \in Z_j(F^n A_\bullet)$  und  $\tilde{x} \in F^m A_\bullet$  wie oben. Dann ist

$$k(xj(y)) = \partial(xj(y)) = [d(\tilde{x}y)] = [d(\tilde{x})y \pm \tilde{x}d(y)] = [d(\tilde{x})y] = \partial(x)y = k(x)y,$$

denn  $d(y) = 0$  nach Voraussetzung. Die zweite Gleichung folgt analog.

Schließlich zu Axiom (5). Seien  $n \geq 0$ ,  $x_1, x_2 \in E = H_*(QF^\bullet)$  und  $y_1, y_2 \in D = H_*(F^\bullet)$  gegeben, so dass  $\partial(x_r) = i^n(y_r)$ . Wir betrachten  $x_1, x_2$  als repräsentierende Zykel und wählen  $\tilde{x}_r \in F^\bullet$  wie oben als Urbild von  $x_r$  unter  $F^\bullet \rightarrow QF^\bullet \supseteq Z(QF^\bullet)$ . Nach Definition des Verbindungshomomorphismus gilt:

$$i(\partial(x_r)) = d(\tilde{x}_r).$$

Wir berechnen nun auf dem Kettenniveau:

$$\begin{aligned} i(\partial(x_1 x_2)) &= d(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2) = d(\tilde{x}_1) x_2 \pm x_1 d(\tilde{x}_2) \\ &= i(\partial(x_1)) \tilde{x}_2 \pm \tilde{x}_1 i(\partial(x_2)) \\ &= i^{n+1}(y_1) \tilde{x}_2 \pm \tilde{x}_1 i^{n+1}(y_2) \\ &\stackrel{(3)}{=} i^{n+1}(y_1 \tilde{x}_2 \pm \tilde{x}_1 y_2). \end{aligned}$$

Also liefert  $y = y_1 \tilde{x}_2 \pm \tilde{x}_1 y_2$  eine Lösung, denn  $i$  ist auf dem Kettenniveau injektiv.  $\square$

**Korollar 7.2.5.** *Sei  $C_{\bullet\bullet}$  ein Algebra-Bikomplex (d. h. es gibt eine assoziative Multiplikation  $C_{ij} \otimes C_{i'j'} \rightarrow C_{i+i', j+j'}$ ). Dann ist die zugehörige Spektralsequenz eine Spektralsequenz von dgas.*

*Beweis.* Man überprüft sofort, dass die Filtrierung des Doppelkomplexes multiplikativ ist.  $\square$

**Korollar 7.2.6.** *Seien  $F, G$  zwei ringwertige Funktoren, die die Bedingungen der kohomologischen Grothendieck-Spektralsequenz erfüllen. Dann ist die kohomologische Grothendieck-Spektralsequenz eine Spektralsequenz von dgas.*

*Beweis.* Wir können als injektive Auflösungen in der Konstruktion der Grothendieck-Spektralsequenz multiplikative Auflösungen wählen, denn diese existieren immer (dual zu komultiplikativen projektiven Auflösungen von Koalgebren). Der dazu gehörende Doppelkomplex ist damit multiplikativ, und das Resultat folgt aus dem Korollar.  $\square$

**Korollar 7.2.7.** *Sei  $k$  ein Körper und  $\Gamma = N \rtimes Q$  ein semi-direktes Produkt von Gruppen, so dass  $Q$  trivial auf  $H^*(N; k)$  operiert. Dann bricht die zugehörige kohomologische Serre-Spektralsequenz mit Koeffizienten in  $k$  bei  $E_2$  zusammen.*

*Beweis.* Hierzu benutzen wir die bisher nicht erwähnte, aber aus der Konstruktion offensichtliche, Funktorialität der Spektralsequenz. Wir betrachten den Morphismus von Gruppenerweiterungen

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

der nach Voraussetzungen einen Schnitt hat. Die Spektralsequenz der oberen, trivialen, Erweiterung ist auf der vertikalen Achse konzentriert; also muss  $E_n^{0,q} = H^q(N; k)$  für alle  $n$  gelten. Also ist  $d_n = 0$ , eingeschränkt auf die  $p = 0$ -Achse. Da die Algebra  $E_2^{**} = H^*(Q; k) \otimes_k H^*(N; k)$  aber erzeugt wird von Elementen auf der  $p = 0$ -Achse zusammen mit Elementen auf der  $q = 0$ -Achse (wo alle Differenziale aus Dimensionsgründen verschwinden), gibt es überhaupt keine Differenziale.  $\square$

**Bemerkung 7.2.8.** *Aus diesem Korollar folgt nicht, dass  $H^*(G; k) \cong H^*(Q; k) \otimes_k H^*(n; k)$  als Ringe gilt. Es folgt nur, dass für die Serre-Filtrierung  $F^\bullet H^*(G; k)$  die assoziierte Algebra der Filtrierungsquotienten isomorph zu dem Tensorprodukt ist. Wir drücken das auch aus, indem wir sagen, dass es multiplikative Erweiterungen geben kann.*

### 7.3 Weitere Beispiele

Um zu zeigen, wie mächtig die multiplikative Struktur ist, wollen wir nun einige Kohomologiegruppen berechnen.

**Beispiel 7.3.1** (Die Diedergruppe  $D_8$ ). Wir betrachten die Gruppe  $D_8$  der Symmetrien eines Quadrats. Die Determinante liefert eine Projektion dieser Gruppe auf  $C_2$ , wir erhalten also eine Gruppenerweiterungssequenz

$$1 \rightarrow C_4 \rightarrow D_8 \rightarrow C_2 \rightarrow 1.$$

Diese Sequenz zerfällt, denn ein Schnitt  $C_2 \rightarrow D_8$  ist gegeben durch eine beliebige Reflexion in  $D_8$ .

Wir wissen, dass  $H^*(C_2; \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2[[x]]$  und  $H^*(C_4; \mathbf{F}_2) = \bigwedge(y) \otimes \mathbf{F}_2[[z]]$  mit  $|x| = 1$ ,  $|y| = 1$ ,  $|z| = 2$ . Da  $\mathbf{F}_2$  keine nichttrivialen Automorphismen hat, ist

$$E_2^{**} = \mathbf{F}_2[[x, z]] \otimes \bigwedge(y).$$

## 7 Die Hochschild-Lyndon-Serre-Spektralsequenz

Korollar 7.2.7 ist anwendbar, und wir schließen, dass  $H^n(D_8; \mathbf{F}_2) \cong \mathbf{F}_2^{n+1}$  gilt. Bezüglich der multiplikativen Struktur können wir nur teilweise Aussagen machen; wir können  $\xi, \eta \in H^1(D_8; \mathbf{F}_2)$  und  $\zeta \in H^2(D_8; \mathbf{F}_2)$  so wählen, dass ihre Bilder in der assoziierten graduierten Algebra  $x, y$  und  $z$  entsprechen, und so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2[\xi, \zeta] &\subseteq H^*(D_8; \mathbf{F}_2) \\ \eta^2 &= \alpha \xi \eta + \beta \zeta^2, \end{aligned}$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  noch unbekannt sind.

Wir betrachten nun eine andere Spektralsequenz, nämlich die zu der Gruppenerweiterung

$$1 \rightarrow C_2 \rightarrow D_8 \rightarrow C_2 \times C_2 \rightarrow 1$$

Diese Erweiterung ist zentral, zerfällt aber nicht, wir müssen in der Serre-Spektralsequenz also Differenziale erwarten.

Wir haben

$$E_2^{**} = \mathbf{F}_2[[y_1, y_2]] \otimes \mathbf{F}_2[[x]] \quad \text{mit } |y_1| = |y_2| = (1, 0), \quad |x| = (0, 1).$$

Da  $H^1(D_8) = \mathbf{F}_2^2$  ist, muss es ein Differenzial  $d_2(x) \neq 0$  geben.

**Lemma 7.3.2.** Sei  $1 \rightarrow N \rightarrow \Gamma \rightarrow Q \rightarrow 1$  eine Gruppenerweiterung. Dann zerfällt die zurückgezogene Gruppenerweiterung  $1 \rightarrow N \rightarrow \Gamma' \rightarrow \Gamma \rightarrow 1$ , wobei  $\Gamma' = \Gamma \times_Q \Gamma$  das Pullback ist.

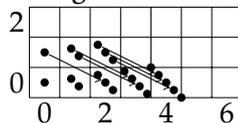
*Beweis.* Die Diagonalabbildung  $\Gamma \rightarrow \Gamma'$  liefert einen Schnitt. □

Aus dem Lemma folgt, dass unter der Abbildung  $H^2(C_2 \times C_2; \mathbf{F}_2) \rightarrow H^2(D_8; \mathbf{F}_2)$  die Erweiterungsklasse der Gruppenerweiterung  $D_8$  nach null gehen muss, denn sie repräsentiert die triviale Erweiterung  $1 \rightarrow C_2 \rightarrow D_8' \rightarrow D_8 \rightarrow 1$ . Folglich ist das Bild von  $d_2(x)$  diese Erweiterungsklasse. Da wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & D_8 & \longrightarrow & C_2 \times C_2 \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow p_i \\ 1 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_2 \times C_2 & \longrightarrow & C_2 \longrightarrow 1 \end{array}$$

haben, folgt, dass die Erweiterungsklasse  $y_1 y_2$  sein muss; hätte sie einen Summanden  $y_1^2$  oder  $y_2^2$ , so wäre sie auch nichttrivial in der unteren Zeile für  $i = 1$  oder  $i = 2$ .

Es ergibt sich aus der Multiplikativität folgendes Diagramm für den  $E_2$ -Term:

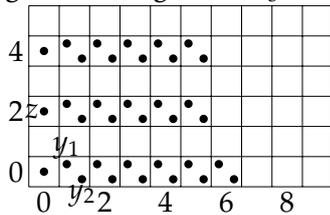


Also ist  $E_2^{**} = \mathbf{F}_2[[y_1, y_2, z]] / (y_1 y_2)$ , wobei  $|z| = (0, 2)$  von  $x^2$  dargestellt wird. Die Dimensionen stimmen mit der zuvor additiv berechneten Kohomologie von  $D_8$  überein,

also muss die Spektralsequenz bei  $E_3$  kollabieren. Auch kann es keine multiplikativen Erweiterungen geben, und daher ist die Kohomologie berechnet:

$$H^*(D_8; \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2[[y_1, y_2, z]] / (y_1 y_2); \quad |y_1| = |y_2| = 1, |z| = 2.$$

**Beispiel 7.3.3** (Die Quaternionengruppe  $Q_8$ ). Wir betrachten nun die andere nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8, die Gruppe der Quaternionen  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ . Auch hier haben wir eine zentrale Gruppenerweiterung  $1 \rightarrow C_2 \rightarrow Q_8 \rightarrow C_2 \times C_2 \rightarrow 1$  wie oben, wobei das Zentrum  $\pm 1$  ist; der Quotient besteht aus den Projektionen von  $1, i, j$  und  $k$ . Die Projektionen  $p_i: C_2 \times C_2 \rightarrow C_2$  sowie die Diagonale  $C_2 \rightarrow C_2 \times C_2$  bilden die Gruppenerweiterung in die (bzw. aus der) Erweiterung  $1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow C_2 \rightarrow 1$  ab, also ist die Erweiterungsklasse hier  $y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 \in H^2(C_2 \times C_2; \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2[[y_1, y_2]]$ . Hieraus ergibt sich folgender  $E_3$ -Term:



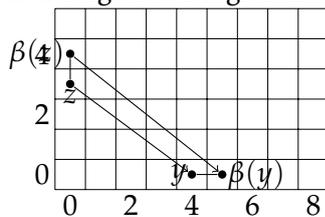
Es gibt ein mögliches  $d_3$ , nämlich  $d_3(z) = \lambda y_1^3 = \lambda y_2^3$  (die einzige nichttriviale Klasse, die symmetrisch in  $y_1$  und  $y_2$  ist).

Mit den Mitteln, die wir im Moment zur Hand haben, lässt sich nicht entscheiden, ob  $\lambda$  nichttrivial ist, außer, wir versuchten,  $H^2(Q_8; \mathbf{F}_2)$  von Hand auszurechnen. Als Deus ex machina können wir aber den folgenden Spezialfall des *Transgressionsatzes* [McCO1, Ch. 6.1] verwenden, den wir hier aber nicht beweisen werden:

**Satz 7.3.4.** In der Serre-Spektralsequenz für die Kohomologie einer Gruppenerweiterung mit Koeffizienten in  $\mathbf{F}_p$  besteht folgender Zusammenhang zwischen dem Bockstein-Homomorphismus  $\beta: H^n(-; \mathbf{F}_p) \rightarrow H^{n+1}(-; \mathbf{F}_p)$  und den Differenzialen:

Ist  $z \in E_n^{p,0}$  mit  $d_n(z) = y \in E_n^{0,p+1}$ , so ist  $d_{n+1}(\beta(z)) = \beta(y) \in E_{n+1}^{0,p+2}$ .

Das folgende Diagramm veranschaulicht diesen Satz:



Aus dem Satz folgt, dass

$$d_3(x^2) = d_3(\beta(x)) = \beta(d_2(x)) = \beta(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) = y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 = y_1^3 = y_2^3.$$

Es folgt:

$$E_4^{**} = \mathbf{F}_2[[y_1, y_2, \tau]] / (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2, y_1^3); \quad |y_1| = |y_2| = (1, 0), |\tau| = (0, 4).$$

## 7 Die Hochschild-Lyndon-Serre-Spektralsequenz

Es sind keine weiteren Differenziale möglich, auch multiplikative Erweiterungen kann es nicht geben, und wir erhalten:

$$H^*(Q_8; \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2[[y_1, y_2, \tau]] / (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2, y_1^3); \quad |y_1| = |y_2| = 1, |\tau| = 4.$$

# 8 Triangulierte Kategorien und abgeleitete Kategorien

## 8.1 Prätriangulierte Kategorien

Wir kehren in diesem Abschnitt der Kategorie  $\text{Ch}_R$  der Kettenkomplexe über einem Ring  $R$  den Rücken zu und stellen uns die Frage, welche Eigenschaften eine Kategorie allgemein erfüllen muss, damit man auf ihr Funktoren definieren kann, die die Eigenschaften des Homologiefunktors teilen. Wesentlich sind hierbei die Existenz von langen exakten Sequenzen und die Homotopieinvarianz.

**Definition.** Eine *prätriangulierte Kategorie* ist eine additive Kategorie  $\mathcal{C}$  mit einem Auto-funktor  $\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  und einer Klasse von Kettenkomplexen in  $\mathcal{C}$ ,

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A,$$

genannt *ausgezeichnete Dreiecke*, die folgende Axiome erfüllen:

- Das Dreieck  $A \xrightarrow{\text{id}} A \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma A$  ist ausgezeichnet.
- Jedes Dreieck, das isomorph zu einem ausgezeichneten ist, ist selbst ausgezeichnet.

(TR1) Jeder Morphismus  $A \xrightarrow{f} B$  kann in ein ausgezeichnetes Dreieck  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$  eingebaut werden.

(TR2) Das Dreieck  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$  ist genau dann ausgezeichnet, wenn  $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma B$  es ist.

(TR3) In jedem Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma \alpha \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & \Sigma A' \end{array}$$

mit ausgezeichneten Dreiecken als Zeilen und gegebenen Morphismen  $\alpha, \beta$  gibt es es eine Fortsetzung  $\gamma$ , so dass das Diagramm kommutiert.

Man beachte, dass in Axiom (TR1) nicht gefordert wird, dass  $C$  eindeutig ist, und in Axiom (TR3) muss die Fortsetzung  $\gamma$  auch nicht eindeutig bestimmt sein. Tatsächlich folgt aus (TR3), dass  $C$  in (TR1) bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt ist, wie wir in Korollar 8.1.3 zeigen werden.

## 8 Triangulierte Kategorien und abgeleitete Kategorien

**Definition.** Ein *homologischer Funktor* auf einer prätriangulierten Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  in eine abelsche Kategorie, so dass  $F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$  exakt ist für jedes ausgezeichnete Dreieck  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \Sigma A$ . Ist der Funktor kontravariant und bildet ausgezeichnete Dreiecke auf exakte Sequenzen  $F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A)$  ab, so nennt man ihn *kohomologisch*.

Aus Axiom (TR2) folgt, dass  $F$  jedes ausgezeichnete Dreieck auf eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow F(\Sigma^{-1}A) \rightarrow F(\Sigma^{-1}B) \rightarrow F(\Sigma^{-1}C) \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow F(\Sigma A) \rightarrow \cdots$$

abbildet.

**Proposition 8.1.1.** Sei  $T \in \mathcal{C}$ . Dann ist der Funktor  $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$  homologisch und der Funktor  $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$  kohomologisch.

*Beweis.* Der zweite Teil folgt aus dem ersten, denn die oppositionelle Kategorie einer prätriangulierten Kategorie ist kanonisch prätrianguliert, wobei  $\Sigma$  durch  $\Sigma^{-1}$  ersetzt werden muss.

Sei also  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \Sigma A$  ein ausgezeichnetes Dreieck. Wir müssen zeigen, dass  $\text{Hom}(T, A) \rightarrow \text{Hom}(T, B) \rightarrow \text{Hom}(T, C)$  in der Mitte exakt ist. Sei also  $f: T \rightarrow B$  ein Morphismus, so dass  $T \xrightarrow{f} B \rightarrow C$  null ist. Dann können wir folgendes Diagramm aufstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} T & \xrightarrow{=} & T & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma T \\ & & \downarrow f & & \downarrow & & \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \Sigma A \end{array}$$

Die Zeilen sind ausgezeichnete Dreiecke, also gibt es nach Axiom (TR3) eine Fortsetzung  $\Sigma T \rightarrow \Sigma A$  und damit  $T \rightarrow A$ .  $\square$

**Korollar 8.1.2** (Fünferlemma für triangulierte Kategorien). Sei

$$f: (A, B, C) \rightarrow (A', B', C')$$

ein Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken, so dass zwei der Morphismen  $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$ ,  $C \rightarrow C'$  Isomorphismen sind. Dann ist es auch der dritte.

*Beweis.* Per Rotation der Dreiecke (Axiom (TR2)) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $A \rightarrow A'$  und  $B \rightarrow B'$  die Isomorphismen sind. Das Fünferlemma in der Kategorie der abelschen Gruppen und die vorige Proposition implizieren, dass für jedes Objekt  $T \in \mathcal{C}$  gilt, dass  $\text{Hom}(T, C) \rightarrow \text{Hom}(T, C')$  ein Isomorphismus ist. Dann muss  $C \rightarrow C'$  schon ein Isomorphismus gewesen sein, wie man sieht, wenn man  $T = C$  oder  $T = C'$  setzt.  $\square$

Ein Objekt  $C$ , das in einem ausgezeichneten Tripel  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \Sigma A$  auftritt, heißt *Kegel* von  $A \rightarrow B$ .

## 8.2 Exkurs: Quotientenkategorien und Lokalisierung von Kategorien

**Korollar 8.1.3** (Eindeutigkeit des Kegels). Seien  $C, C'$  zwei verschiedene Kegel von  $A \rightarrow B$ . Dann sind  $C$  und  $C'$  isomorph, aber der Isomorphismus ist nicht kanonisch.

*Beweis.* Die Zeilen sind ausgezeichnete Dreiecke in

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \Sigma A \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & \Sigma A, \end{array}$$

also gibt es einen (nicht eindeutig bestimmten) Morphismus  $C \rightarrow C'$ , der nach dem Fünferlemma ein Isomorphismus sein muss.  $\square$

## 8.2 Exkurs: Quotientenkategorien und Lokalisierung von Kategorien

Keine der Kategorien, die wir bisher betrachtet haben, sind prätriangulierte Kategorien per se. Stattdessen müssen wir etwa von der Kategorie der Kettenkomplexe einen Quotienten bilden, so dass homotopieäquivalente Komplexe isomorph werden, bevor wir eine vernünftige prätriangulierte Struktur definieren können.

**Lemma 8.2.1.** Sei  $\mathcal{C}$  eine additive Kategorie und  $S$  eine Klasse von Morphismen in  $\mathcal{C}$ , die abgeschlossen ist unter Addition und Negativen und ein beidseitiges Ideal ist: Ist  $s \in S$  und  $f \in \text{mor}(\mathcal{C})$ , so sind auch  $s \circ f \in S$  und  $f \circ s \in S$ , sofern die Komposition möglich ist.

Definiere eine neue Kategorie  $\mathcal{C}/S$ , deren Objekte die gleichen sind wie die von  $\mathcal{C}$ , aber  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/S}(c, d) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d) / (S \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d))$ . Dann ist  $\mathcal{C}/S$  wiederum eine additive Kategorie.

*Beweis.* Offensichtlich sind die Homomorphismenmengen wieder abelsche Gruppen, denn  $(S \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d))$  ist eine Untergruppe von  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ . Wir zeigen die Wohldefiniertheit und Bilinearität der Komposition: seien  $c \xrightarrow{f} d$  und  $d \xrightarrow{g} e$  Repräsentanten von Morphismen in  $\mathcal{C}/S$ , so ist die Komposition definiert als  $[g \circ f]$  und damit bilinear. Ist  $f'$  ein anderer Repräsentant von  $[f]$ , so ist  $f' \circ g = (f + s) \circ g = f \circ g + s \circ g$ . Aber  $s \circ g \in S$ .

Schließlich müssen wir noch die Existenz von endlichen Produkten und Koprodukten zeigen. Diese stimmen aber überein mit den endlichen Produkten und Koprodukten in  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Bemerkung 8.2.2.** Im Allgemeinen ist  $\mathcal{C}/S$  nicht abelsch, selbst wenn  $\mathcal{C}$  es war, wie die Beispiele zeigen werden.

Es gibt eine ähnliche, aber kompliziertere Konstruktion, die sich zu der Bildung von Quotientenkategorien so verhält wie Quotienten von Moduln zu Lokalisierungen. Dazu sei  $S \subseteq \mathcal{C}$  eine Klasse von Morphismen, die abgeschlossen ist unter Komposition und alle Isomorphismen enthält. Wir wollen eine neue Kategorie  $S^{-1}\mathcal{C}$  definieren, die die

gleichen Objekte wie  $\mathcal{C}$  hat, wo aber alle Morphismen in  $S$  zu Isomorphismen werden. Dazu definieren wir die Homomorphismenmengen um:

$$\text{Hom}_{S^{-1}\mathcal{C}}(c, d) = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & c_1 & & \\ & f_0 \nearrow & & \nwarrow s_1 & \\ c = c_0 & & & & c_2 & & f_2 \nearrow & \cdots & \nwarrow s_{n-1} & \\ & & & & & & & & & c_n = d \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} n \in \mathbf{N}; \quad c_i \in \mathcal{C}; \\ s_i \in S; \quad f_i \in \mathcal{C} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Die Verkettung erfolgt durch Aneinanderhängen dieser Zickzack-Diagramme; dabei ist ein Diagramm äquivalent zu einem entsprechend kleineren, wenn einer der  $s_i$  ein Isomorphismus ist oder einer der  $f_i$  in  $S$  liegt.

Das Problem hierbei ist ein mengentheoretisches: Da die Objekte keine Menge bilden, ist nun auch  $\text{Hom}(c, d)$  keine Menge mehr. Einschränkungen an  $S$  sind nötig.

**Definition.** Man sagt, dass  $S$  einen *Kalkül der Brüche* erlaubt, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. (Kleinheitsbedingung) Für jedes  $d \in S$  gibt es eine Menge  $S_d \subseteq S$ , so dass es für jeden Morphismus  $c \rightarrow d$  in  $S$  einen Morphismus  $b \rightarrow c$  in  $\mathcal{C}$  gibt, so dass  $b \rightarrow c \rightarrow d$  in  $S_d$  liegt.
2. ( $\emptyset$ -Bedingung) Für alle Morphismen  $f: c \rightarrow d, s: c' \rightarrow d$  mit  $s \in S$  gibt es ein Objekt  $d'$  und Morphismen  $f': d' \rightarrow c'$  und  $s': d' \rightarrow c$  mit  $s' \in S$ , so dass  $fs' = sf'$ ;
3. Sind  $f, g: c \rightarrow d$  zwei Morphismen, dann gibt es ein  $s \in S$ , so dass  $sf = sg$  genau dann, wenn es ein  $s \in S$  gibt mit  $fs = gs$ .

**Proposition 8.2.3** (Gabriel-Zisman). Falls  $(\mathcal{C}, S)$  einen Kalkül der Brüche erlaubt, ist  $S^{-1}\mathcal{C}$  eine Kategorie. War  $\mathcal{C}$  additiv, so ist es auch  $S^{-1}\mathcal{C}$ .

Den Beweis lasse ich hier aus, er findet sich zum Beispiel in dem Buch [GZ67].

### 8.3 Die Homotopiekategorie der Kategorie der Kettenkomplexe

Es sei  $h\text{Ch}_{\mathcal{C}}$  der Quotient der Kategorie  $\text{Ch}_{\mathcal{C}}$  der Kettenkomplexe in  $\mathcal{C}$  nach dem Ideal der nullhomotopen Kettenabbildungen. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass  $h\text{Ch}_{\mathcal{C}}$  eine prätriangulierte Struktur besitzt, so dass die gewöhnlichen Homologie- und Kohomologiefunktoren (ko)homologische Funktoren im Sinn des vorigen Abschnitts sind. Der Autofunktor  $\Sigma^n$  ist gegeben durch Verschiebung des Kettenkomplexes um  $n$  Schritte in die negative Richtung, d. h.  $(\Sigma C)_n = C_{n+1}$ .

Dazu betrachten wir zunächst einige natürliche Konstruktionen in der Kategorie der Kettenkomplexe.

**Definition.** Sei  $f: C_{\bullet} \rightarrow D_{\bullet}$  ein Morphismus von Kettenkomplexen.

### 8.3 Die Homotopiekategorie der Kategorie der Kettenkomplexe

- Der *Abbildungszylinder* von  $f$  ist der Kettenkomplex  $\text{cyl}(f)$  mit

$$\text{cyl}(f)_n := C_n \oplus C_{n-1} \oplus D_n$$

und mit Differenzialen

$$d_n = \begin{pmatrix} d_n^C & \text{id}_{C_n} & 0 \\ 0 & -d_{n-1}^C & 0 \\ 0 & -f_n & d_n^D \end{pmatrix}.$$

- Der *Abbildungskegel* von  $f$  ist der Kettenkomplex  $\text{cone}(f)$  mit

$$\text{cone}(f)_n := C_{n-1} \oplus D_n; \quad d_n = \begin{pmatrix} -d_{n-1}^C & 0 \\ -f_n & d_n^D \end{pmatrix}.$$

Die Namen sind aus der Topologie entlehnt und sind im Kontext der homologischen Algebra schwer zu erklären. Man prüft leicht nach, dass es sich um Kettenkomplexe handelt. Weiterhin gilt:

**Lemma 8.3.1.** *Sei  $f: C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  ein Morphismus von Kettenkomplexen. Dann ist die kanonische Inklusion des Summanden  $i: D \rightarrow \text{cyl}(f)$  eine Homotopieäquivalenz, und zusammen mit der kanonischen Inklusion des Summanden  $C \rightarrow \text{cyl}(f)$  kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet & \xrightarrow{f} & D_\bullet \\ & \searrow & \downarrow \sim \\ & & \text{cyl}(f) \end{array}$$

bis auf Homotopie.

*Beweis.* Eine homotopie-inverse Abbildung von  $D \rightarrow \text{cyl}(f)$  ist gegeben durch

$$\pi: \text{cyl}(f) \rightarrow D; \quad \pi(c, c', d) = d + f(c).$$

Denn betrachten wir die Homotopie

$$H: \text{cyl}_n(f) \rightarrow \text{cyl}_{n+1}(f), \quad H(c, c', d) = (0, c, 0).$$

Dann ist

$$Hd + dH = \begin{pmatrix} \text{id}_{C_n} & 0 & 0 \\ 0 & \text{id}_{C_{n-1}} & 0 \\ -f_n & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{id}_{\text{cyl}(f)} - i \circ \pi.$$

Andererseits ist  $\pi \circ i = \text{id}_D$ .

Aus dieser Berechnung folgt auch die Kommutativität bis auf Homotopie des Diagramms. Betrachten wir nämlich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet & \xrightarrow{f} & D_\bullet \\ & \searrow & \uparrow \pi \\ & & \text{cyl}(f), \end{array}$$

so kommutiert es strikt; da  $i$  homotopieinvers zu  $\pi$  ist, folgt das Resultat. □

**Lemma 8.3.2.** *Der Kegel von  $f$  ist der Kokern der Abbildung  $C_\bullet \rightarrow \text{cyl}(f)$ . Er hat folgende universelle Eigenschaft: Falls  $D_\bullet \xrightarrow{g} T_\bullet$  ein Morphismus ist, so ist  $C_\bullet \rightarrow D_\bullet \rightarrow T_\bullet$  genau dann nullhomotop, wenn es eine Fortsetzung  $\text{cone}(f) \rightarrow T_\bullet$  gibt.*

*Beweis.* Die erste Aussage ist durch Betrachtung der Matrizen für  $d$  offenbar (man streiche die erste Zeile und Spalte in  $d^{\text{cyl}(f)}$ ).

Ist  $H: C_n \rightarrow T_{n+1}$  eine Nullhomotopie von  $C_\bullet \rightarrow D_\bullet \rightarrow T_\bullet$ , so liefert  $(H \ f): C_{n-1} \oplus D_n \rightarrow T_n$  eine Fortsetzung; wir überprüfen, dass es tatsächlich eine Kettenabbildung ist.

$$\begin{aligned} (H \ f) d^{\text{cone}(f)}(\gamma, \delta) &= -H(d(\gamma)) - g(f(\gamma)) + g(d(\delta)) \\ &\stackrel{H \text{ Homotopie}}{=} d(H(\gamma)) + g(d(\delta)) = d((H \ f)(\gamma, \delta)). \end{aligned}$$

Andererseits ist der Morphismus  $C_\bullet \rightarrow D_\bullet \rightarrow \text{cone}(f)$  nullhomotop;  $H: C_\bullet \rightarrow \text{cone}(f)$ , definiert durch  $H(c) = (c, 0)$ , ist eine Nullhomotopie. Also ist auch  $g \circ f$  nullhomotop, wenn  $g$  durch  $\text{cone}(f)$  faktorisiert.  $\square$

**Lemma 8.3.3.** *Eine Abbildung  $f: C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn der Kegel  $\text{cone}(f)$  zusammenziehbar (d. h. homotopieäquivalent zu dem Nullkomplex) ist.*

*Beweis.* Der Beweis sei dem Leser überlassen.  $\square$

Wir bringen jetzt die Kegelkonstruktion mit der langen exakten Homologiesequenz in Verbindung.

**Lemma 8.3.4** (Puppe-Sequenz). *Sei  $C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet$  ein Morphismus von Kettenkomplexen, und sei  $g: D_\bullet \rightarrow \text{cone}(f)$  die natürliche Abbildung. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus  $\text{cone}(g) \cong C[-1]$ . Durch Iterieren erhält man die Puppe-Sequenz*

$$\cdots \text{cone}(f)[1] \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow \text{cone}(f) \xrightarrow{h} C[-1] \rightarrow D[-1] \rightarrow \text{cone}(f)[-1] \rightarrow \cdots$$

*Anwenden von Homologie auf diese Sequenz erzeugt eine lange exakte Sequenz, die mit der langen exakten Homologiesequenz für  $0 \rightarrow C \rightarrow \text{cyl}(D) \rightarrow \text{cone}(D) \rightarrow 0$  übereinstimmt; insbesondere ist  $h_* = \partial$ .*

*Beweis.* Es gilt

$$\text{cone}(g)_n = D_{n-1} \oplus C_{n-1} \oplus D_n \quad \text{mit} \quad d^{\text{cone}(g)} = \begin{pmatrix} -d^D & 0 & 0 \\ 0 & -d^C & 0 \\ -\text{id}_D & -f & d^D \end{pmatrix}.$$

Sei  $\alpha: \Sigma C_\bullet \rightarrow \text{cone}(g)$  gegeben durch  $\alpha(c) = (f(c), c, 0)$ . Damit ist  $\alpha$  eine Kettenabbildung; wir zeigen, dass es eine Homotopieäquivalenz ist. Tatsächlich ist der Kegel von  $\alpha$  isomorph zum Kegel der Identität auf  $D$  und somit zusammenziehbar.  $\square$

### 8.3 Die Homotopiekategorie der Kategorie der Kettenkomplexe

**Satz 8.3.5.** Die Kategorie  $hCh_R$  ist prätrianguliert, wobei  $\Sigma = [-1]$  und die ausgezeichneten Dreiecke die sind, die zu Dreiecken der Form

$$C \rightarrow \text{cyl}(f) \rightarrow \text{cone}(f) \rightarrow C[-1]$$

für einen Morphismus  $f: C \rightarrow D$  isomorph sind.

*Beweis.* Wir überprüfen die Axiome. Das Dreieck  $C \rightarrow \text{cyl}(\text{id}_C) \rightarrow \text{cone}(\text{id}_C)$  ist isomorph zu  $C \xrightarrow{\text{id}_C} C \rightarrow 0$ , denn  $\text{cyl}(\text{id}_C)$  ist homotopieäquivalent zu  $C$  und der Kegel auf der Identität zusammenziehbar.

Die Abgeschlossenheit unter Isomorphie von ausgezeichneten Dreiecken ist Teil der Definition.

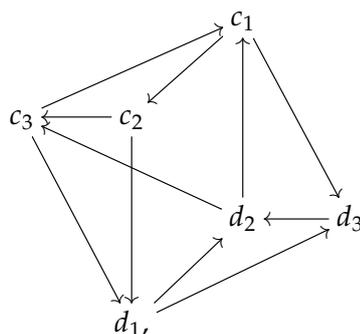
Ist  $f: C \rightarrow D$  ein Morphismus, so ist  $C \rightarrow D \rightarrow \text{cone}(f) \rightarrow C[-1]$  ausgezeichnet, denn  $D \simeq \text{cyl}(f)$ ; damit ist (TR1) gezeigt.

Das vorige Lemma über die Puppe-Sequenz beweist Axiom (TR2). Um Axiom (TR3) zu zeigen, verwenden wir die Charakterisierung des Abbildungskegels; ist ein Diagramm wie in der Formulierung von (TR3) gegeben, so betrachte die Abbildung  $B \xrightarrow{\beta} B' \rightarrow C'$ . Diese Abbildung wird nullhomotop, wenn man  $A \rightarrow B$  vorschaltet, denn wegen der Kommutativität des Diagramms ist dies die gleiche Abbildung wie  $A \xrightarrow{\alpha} A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ . Also faktorisiert sie durch  $C \rightarrow C'$ , und (TR3) ist gezeigt.  $\square$

#### 8.3.1 Das Oktaeder-Axiom

Die Kategorie  $hCh_R$  erfüllt eine weitere Eigenschaft, das sogenannte Oktaeder-Axiom; dies werde ich hier aber nicht beweisen (der Beweis ist elementar, vgl. [Wei94, Proposition 10.2.4]).

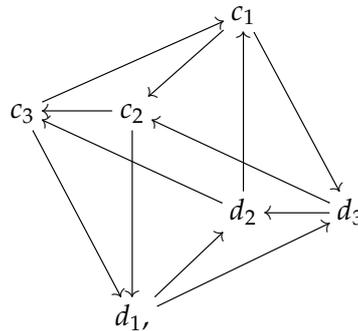
(TR4) Gegeben sei ein Diagramm der Form



in dem die Dreiecke der Form  $\begin{matrix} \bullet & \rightarrow & \bullet \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \bullet \end{matrix}$  kommutieren und die zyklischen Dreiecke  $\begin{matrix} a & \rightarrow & b \\ \nwarrow & & \downarrow \\ & & c \end{matrix}$  ausgezeichnete Dreiecke  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \Sigma a$  darstellen (leicht mehrdeutig). Dann

## 8 Triangulierte Kategorien und abgeleitete Kategorien

gibt es einen Morphismus  $d_3 \rightarrow c_2$ , so dass das entstehende Diagramm genauso zu lesen ist:



**Definition.** Eine prätriangulierte Kategorie heißt *trianguliert*, falls sie außerdem das Oktaeder-Axiom (TR4) erfüllt.

### 8.4 Abgeleitete Kategorien und abgeleitete Funktoren

**Proposition 8.4.1.** Sei  $S \subseteq {}^h\text{Ch}_R$  die Klasse derjenigen Morphismen, die einen Homologie-Isomorphismus induzieren. Dann erlaubt  $S$  einen Kalkül der Brüche.

*Beweis.* Dass  $S$  multiplikativ ist und alle Isomorphismen enthält, ist klar. Wir zeigen, dass die Ore-Bedingung erfüllt ist. Seien also zwei Morphismen  $C \rightarrow D$ ,  $C' \rightarrow D$  gegeben, so dass  $C' \rightarrow D$  ein Homologie-Isomorphismus ist. Wir können wegen (TR2)  $C' \rightarrow D$  zu einem ausgezeichneten Dreieck  $C' \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow \Sigma C'$  fortsetzen, und mit Hilfe dieser Abbildung, auch  $C \rightarrow D \rightarrow E$  zu einem ausgezeichneten Dreieck  $C \rightarrow E \rightarrow F$  fortsetzen, so dass wir folgendes Diagramm erhalten:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Sigma^{-1}F & \longrightarrow & C & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F \\
 \vdots & & \downarrow & & \parallel & & \vdots \\
 C' & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \Sigma C'
 \end{array}$$

Die gestrichelten Pfeile existieren wegen (TR3). Aber  $H_*(E) = 0$  wegen der langen exakten Sequenz in der unteren Zeile, also ist auch  $\Sigma^{-1}F \rightarrow C'$  ein Homologie-Isomorphismus.

**Übung:** Zeige die restlichen Axiome. □

**Definition** (und Lemma). Die Kategorie  $S^{-1}{}^h\text{Ch}_R$  heißt die *abgeleitete* oder *derivierte Kategorie* von  $\text{Mod}_R$  und ist trianguliert. Sie wird mit  $\mathcal{D}(R)$  bezeichnet.

**Bemerkung 8.4.2.** Es existieren Varianten  $\mathcal{D}^b(R)$ ,  $\mathcal{D}^+(R)$ ,  $\mathcal{D}^-(R)$ , die genauso gebaut werden, wo man aber nur beschränkte / nichtnegative graduierte / nichtpositiv graduierte Kettenkomplexe zulässt.

## 8.4 Abgeleitete Kategorien und abgeleitete Funktoren

**Definition.** Sei  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Ist  $\mathbf{L}F: \mathcal{D}^+(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$  ein Funktor von triangulierten Kategorien mit einer natürlichen Transformation  $\zeta: \mathbf{L}F \rightarrow F$ , so heißt  $\mathbf{L}F$  *totaler linksabgeleiteter Funktor* von  $F$ , falls er folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Ist  $G: \mathcal{D}^+(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$  irgendein triangulierter Funktor mit einer natürlichen Transformation  $\zeta: G \rightarrow F$ , so gibt es eine eindeutige natürliche Transformation  $\eta: G \rightarrow \mathbf{L}F$ , so dass  $\eta \circ \zeta = \zeta$ .

**Satz 8.4.3.** Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit genug Projektiven und  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ein additiver Funktor, dann existiert der totale linksabgeleitete Funktor  $\mathbf{L}F$ , und auf Kettenkomplexen  $P_\bullet$  aus projektiven Objekten gilt  $\mathbf{L}F(P) = F(P)$ . Insbesondere ist  $L_n F(X) = H_n((\mathbf{L}F)(X))$ .

Den (unschweren) Beweis dieses Satzes findet man zum Beispiel in [Wei94, 10.5.6]

# Literaturverzeichnis

- [AM04] Alejandro Adem and R. James Milgram, *Cohomology of finite groups*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 309, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR MR2035696 (2004k:20109)
- [Boa99] J. Michael Boardman, *Conditionally convergent spectral sequences*, Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998), Contemp. Math., vol. 239, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 49–84. MR 2000m:55024
- [Bro94] Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1994, Corrected reprint of the 1982 original. MR MR1324339 (96a:20072)
- [CE99] Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999, With an appendix by David A. Buchsbaum, Reprint of the 1956 original. MR MR1731415 (2000h:18022)
- [Eve91] Leonard Evens, *The cohomology of groups*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1991, Oxford Science Publications. MR MR1144017 (93i:20059)
- [Fre64] Peter Freyd, *Abelian categories. An introduction to the theory of functors*, Harper's Series in Modern Mathematics, Harper & Row Publishers, New York, 1964. MR MR0166240 (29 #3517)
- [FW67] Carl Faith and Elbert A. Walker, *Direct-sum representations of injective modules*, J. Algebra **5** (1967), 203–221. MR MR0207760 (34 #7575)
- [GM03] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin, *Methods of homological algebra*, second ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. MR MR1950475 (2003m:18001)
- [GZ67] P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967. MR MR0210125 (35 #1019)
- [HS97] P. J. Hilton and U. Stambach, *A course in homological algebra*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 4, Springer-Verlag, New York, 1997. MR MR1438546 (97k:18001)

- [McC01] John McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. MR MR1793722 (2002c:55027)
- [Mit64] Barry Mitchell, *The full imbedding theorem*, Amer. J. Math. **86** (1964), 619–637. MR MR0167511 (29 #4783)
- [Mit65] ———, *Theory of categories*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XVII, Academic Press, New York, 1965. MR MR0202787 (34 #2647)
- [ML95] Saunders Mac Lane, *Homology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1975 edition. MR MR1344215 (96d:18001)
- [ML98] ———, *Categories for the working mathematician*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998. MR MR1712872 (2001j:18001)
- [Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR MR1269324 (95f:18001)
- [Wei99] ———, *History of homological algebra*, History of topology, North-Holland, Amsterdam, 1999, pp. 797–836. MR MR1721123 (2000m:18001)

# Index

- Abbildungskegel, **101**, 102
- Abbildungszylinder, 101, **101**
- Abelisierung, **41**
- abelsche Kategorie, **17**, **18**
- abgeleitete Kategorie, **104**
- abgeleiteter Funktor, **25**, 82
- abgeleitetes Tripel, 75, **75**, 76, 91
- additive Kategorie, **17**, **18**
- additiver Funktor, **18**
- aquivalente Erweiterungen, **42**
- aquivalente Schnitte, **42**
- Aquivalenz
  - von Kategorien, **44**
- ausere Algebra, **59**
- auserer Automorphismus, **40**
- Algebra, **1**
  - ausere, **59**
  - differenzielle graduierte, **54**
  - dividierte Potenzen, **59**
  - graduiert-symmetrische, **55**
  - graduierte Tensor-, **55**
  - Ketten-, **54**
  - Modul-, **53**
  - Modul-Ketten-, **54**
- Algebra-Bikomplex, **92**
- amalgamierte Summe, **16**
- Anti-Homomorphismus, **2**
- assoziertes Objekt, **71**
- Auflösung
  - azyklische, 82
  - Bar-, 40, **40**
  - Cartan-Eilenberg-, **83**
  - injektive, 21, **21**, 24
  - komultiplikative, 57
  - komultiplikative injektive, **56**
  - komultiplikative projektive, **56**
  - multiplikative injektive, **56**
    - multiplikative projektive, **56**
    - projektive, 21, **21**, 24
- augmentierter Komplex, **33**
- ausgezeichnetes Dreieck, **97**
- Automorphismus
  - auserer, **40**
  - innerer, **40**
- azyklische Auflösung, 82
- Baer
  - Satz von, **11**
- Bar-Auflösung, 40, **40**
- Bar-Komplex, 40, **40**
- beidseitiges Ideal, **1**, **99**
- Bialgebra, **53**
- Bigraduierung
  - natürliche, 76
- Bikomplex
  - Algebra-, **92**
- Bildersequenz, **70**
- blumige Sprache, 74
- Bockstein-Homomorphismus, **29**, 95
- Cartan-Eilenberg-Auflösung, **83**
- Cauchy-Folge, **73**
- CE-Auflösung,
  - siehe* Cartan-Eilenberg-Auflösung
- Derivation, **54**
- derivierete Kategorie, **104**
- dga, **54**
- dgca, **55**
- Diagonalapproximation, **56**
- Diagramm
  - Zickzack-, **100**
- diagrammatischer, **67**
- Diagrammjagd, **26**
- Diedergruppe, 93

- Differenzial, 7
- differenzielle graduierte Algebra, 54
- differenzielle graduierte Koalgebra, 55
- Dimensionsverschiebung, 29
- direkte Summe, 3
- direkter Limes,
  - siehe* Kolimes
- diskrete Heisenberggruppe, 90
- dividierte Potenzalgebra, 59
- Doppelkomplex, 31, 32, 82
- Doppelnebenklassenformel, 50
- Dreieck
  - ausgezeichnetes, 97
- Epimorphismus, 17
- erschöpfende Filtrierung, 81
- erschöpfende Filtrierung, 71
- erste Homologiegruppe, 41
- erstes Jonglierlemma, 63
- Erweiterung, 42, 43, 94
  - aquivalente, 42
  - multiplikative, 93
- exakte Sequenz, 6, 17
- exakter Funktor, 18, 18
- exaktes Tripel, 75, 75, 76
- Ext, 29, 30, 33
  - Produkt, 61, 62
  - Yoneda-, 33
- externes Produkt, 59, 59, 60
- Extremkonstruktion, 8
- Faserprodukt, 16
- Filtrierung, 71, 75
  - erschöpfende, 71, 81
  - hausdorffsche, 71, 81
  - multiplikative, 90, 92
  - vollständige, 71
- flacher Modul, 10, 10
- flaches Objekt, 18
- Folge
  - Cauchy, 73
  - Null-, 73
- freier Modul, 4, 7
- Funferlemma, 28, 98
- Fundamentallemma, 23
- Funktor, 14, 15
  - (links)abgeleiteter, 25
  - (rechts)abgeleiteter, 25
  - abgeleiteter, 25, 82
  - additiver, 18
  - adjungierter, 44
  - exakter, 18, 18
  - halbexakter, 18
  - homologischer, 98, 98
  - kohomologischer, 98, 98
  - linksadjungierter, 44, 45, 46, 46
  - linksexakter, 18
  - rechtsadjungierter, 44, 45
  - rechtsexakter, 18
  - totaler linksabgeleiteter, 105, 105
- Funktorialität, 39
- Funktorialität der Serre-Spektralsequenz, 93
- genug injektive Objekte, 20, 20, 20, 21
- genug projektive Objekte, 20, 20, 20, 21
- G-Modul, 37
- Grad, 31
- graduiert kommutative Kettenalgebra, 54
- Grothendieck-Spektralsequenz, 83, 92
- Gruppe
  - Dieder-, 93
  - Quaternionen-, 95
  - symmetrische, 51, 89
  - Weyl-, 51
  - zyklische, 4, 38, 57
- Gruppenerweiterung, 42, 43, 94
  - aquivalente, 42
- Gruppenhomologie, 37, 38, 51, 84, 86, 89, 90
- Gruppenkohomologie, 37, 85, 93, 95
  - erste, 43
  - Erweiterung, 43
  - semi-direktes Produkt, 43
  - zweite, 43
- Gruppenring, 2
- halbexakter Funktor, 18

## INDEX

- hausdorffsche Filtrierung, **71, 81**
- Heisenberggruppe
  - diskrete, **90**
- Hochhebung, **7, 10**
- Hochschild-Lyndon-Serre-Spektralsequenz,
  - siehe* Serre-Spektralsequenz
- hoherer Limes, **69, 69, 70**
- Homologie, **22**
  - erste, **41**
  - Gruppen-, **37, 38, 51, 84, 86, 89, 90**
- homologischer Funktor, **98, 98**
- Homomorphismus
  - Bockstein-, **29, 95**
  - Modul-, **1**
  - Ring-, **1**
- homotop, **23, 23**
- Homotopie, **23**
- homotopieäquivalent, **23, 23**
- Homotopiekategorie, **100**
- Homotopieäquivalenz, **102**
  
- Ideal, **1**
  - beidseitiges, **1, 99**
- Identitätsabbildung, **13**
- $\mathcal{I}$ -Diagramm, **65**
- Induktion, **47, 48**
- induktiver Limes,
  - siehe* Kolimes
- initialer Ring, **2**
- initiales Objekt, **17**
- injektive Auflosung, **21, 21, 24**
  - komultiplikative, **56**
  - multiplikative, **56**
- injektiver Modul, **10**
- injektives Objekt, **18**
- Inklusionsfunktor, **65**
- innerer Automorphismus, **40**
- internes Produkt, **59**
- Invarianten, **37**
- inverser Limes,
  - siehe* Limes
  
- Jagd
  - Diagramm-, **26**
  
- Kalkul der Bruche, **100, 100, 104**
- Kategorie, **13, 14**
  - abelsche, **17, 18**
  - abgeleitete, **104**
  - additive, **17, 18**
  - äquivalente, **44**
  - der Objekte über  $c_0$ , **16**
  - der Objekte unter  $c_0$ , **16**
  - derivierte, **104**
  - kleine, **14**
  - Koprodukt, **15**
  - Lokalisierung, **99, 100**
  - pratriangulierte, **97, 103**
  - Produkt, **16**
  - Quotienten-, **99**
  - triangulierte, **104**
- Kegel, **98, 99**
  - Abbildungs-, **101, 102**
- Kern, **17**
- Kettenalgebra, **54**
  - graduirt kommutative, **54**
  - Modul-, **54**
  - Morphismus, **54**
- kettenshomotop, **23, 23**
- Kettenshomotopie, **23**
- kettenshomotopieäquivalent, **23, 23**
- Kettenshomotopieäquivalenz, **102**
- Kettenkoalgebra, **55**
  - Modul-, **55**
- Kettenkomplex, **6**
  - Homotopiekategorie, **100**
  - zusammenziehbarer, **102**
- Kettenkontraktion, **41**
- kleine Kategorie, **14**
- Kleinheitsbedingung, **100**
- Koalgebra, **19**
  - differenzielle graduierte, **55**
  - Ketten-, **55**
  - Modul-, **53**
  - Modul-Ketten-, **55**
- Kobild, **17**
- Koderivation, **55**
- Koeins, **19**
- Kohomologie, **22**

- Gruppen-, 37, 85, 93, 95
- kohomologischer Funktor, 98, **98**
- Koinduktion, 47, 48
- Koinvarianten, 37
- Kokern, 17
- Kolimes, 65, 66, 67, 67
  - universelle Eigenschaft, **65**
- Komodul, **19**
- Komonade, 47
- Komplex,
  - siehe* Kettenkomplex
- Kompositionsabbildung, **13**
- Kompositionsprodukt, **62**
- Komultiplikation, **19**
  - auf Tor, **61**
- komultiplikative Auflösung, 57
- komultiplikative injektive Auflösung, **56**
- komultiplikative projektive Auflösung, **56**
- konditionale Konvergenzeigenschaft, 77
- Kontraktion
  - Ketten-, **41**
- Konvergenz, 32
  - starke, 77
- Konvergenzeigenschaft
  - konditionale, 77
- Konvergenzsatz
  - zentraler, 77
- Koprodukt, 15, 46
  - universelle Eigenschaft, 3, 6
- Kotripel, 47
- Kunneth-Abbildung, **59**
- Kunneth-Sequenz, 86, 86
- Kunneth-Spektralsequenz, 85
- kurze exakte Sequenz, 7
- lange exakte Sequenz, 26
- Laurentpolynome, **38**
- lefflersch
  - mittag-, 71, **71**
- Lemma
  - erstes Jonglier-, 63
  - Funfer-, **28**, 98
  - Schlangen-, 26
  - Shapiro, 48
- Yoneda-, **45**
- letztes Wort, **65**
- Limes, 65, 66, 67, 67, 68, 70
  - direkter,
    - siehe* Kolimes
  - hoherer, 69, **69**, 70
  - induktiver,
    - siehe* Kolimes
  - inverser,
    - siehe* Limes
  - projektiver,
    - siehe* Limes
- linksabgeleiteter Funktor, **25**
  - totaler, 105, **105**
- linksadjungierter Funktor, 44, 45, 46, 46
- linksexakter Funktor, **18**
- Linksmodul, **1**
- Lokalisierung, **99**, 100
- Massey-Produkt, 63, **63**
- mittag-lefflersch, 71, **71**
- Modul, **1**
  - endlich präsentierter, **12**
  - flach, **10**
  - frei, **4**, 7
  - injektiv, **10**
  - Links-, **1**
  - projektiv, 7, 9
  - Rechts-, **2**
- Modul-Kettenalgebra, **54**
- Modul-Kettenkoalgebra, **55**
- Modulalgebra, **53**
- Modulhomomorphismus, **1**
- Modulkoalgebra, **53**
- Monomorphismus, **17**
- Morphismus, **13**
  - Epi-, **17**
  - Kern, **17**
  - Kettenalgebra, **54**
  - Mono-, **17**
- multiplikative Erweiterung, **93**
- multiplikative Filtrierung, **90**, 92
- multiplikative injektive Auflösung, **56**
- multiplikative projektive Auflösung, **56**

## INDEX

- multiplikatives exaktes Tripel, 91, **91**, 92
- My Turn
  - It's, **26**
  
- natürliche Bigraduierung, **76**
- natürliche Transformation, *15*, **15**
- Natürlichkeit, 27, 28
- Neunerlemma, 68
- Normabbildung, **9**, **38**
- Nullfolge, **73**
  
- Objekt, **13**
  - assoziiertes, **71**
  - flaches, **18**
  - genug injektive, 20, *20*, **20**, 21
  - genug projektive, 20, *20*, **20**, 21
  - initiales, **17**
  - injektives, **18**
  - projektives, **18**
  - terminales, **17**
- Øre-Bedingung, **100**
- Oktaeder-Axiom, **103**
- oppositioneller Ring, **1**
  
- p*-adische Zahl, **12**
- p*-lokale Zahl, **12**
- Polynomring, **2**
- Potenzreihenring, **2**
- pratriangulierte Kategorie, **97**, **103**
- Produkt, **3**, **16**, 46
  - auf Ext, 61, 62
  - externes, 59, **59**, 60
  - Faser-, **16**
  - internes, 59
  - Kompositions-, **62**
  - Massey-, 63, **63**
  - semi-direktes, **42**, 43, 93
  - Shuffle-, **57**
  - universelle Eigenschaft, 3, 6
  - von Ringen, **6**
  - Yoneda, **36**
- projektive Auflösung, 21, **21**, 24
  - komultiplikative, **56**
  - multiplikative, **56**
- projektiver Limes,
  - siehe* Limes
- projektiver Modul, 7, 9
- projektives Objekt, **18**
- Pullback, **16**
- Punkt
  - Dreh- und Angel-, 23
- Puppe-Sequenz, 102
- Pushout, **16**
  
- Quaternionengruppe, 95
- Quellabbildung, **13**
- Quotientenkategorie, **99**
  
- Rand, **22**
- Rang, **4**
- rechtsabgeleiteter Funktor, **25**
- rechtsadjungierter Funktor, **44**, 45
- rechtsexakter Funktor, **18**
- Rechtsmodul, **2**
- Retraktion, 7
- Ring, **1**
  - Gruppen-, **2**
  - initialer, **2**
  - oppositioneller, **1**
  - Polynom-, **2**
  - Potenzreihen-, **2**
  - Produkt, **6**
  - Tensorprodukt, **6**
  - terminaler, **2**
- Ringhomomorphismus, **1**
  
- Satz von Baer, **11**
- Schlangenlemma, 26
- Schnitt, 7, **42**, 43
  - äquivalent, **42**
- semi-direktes Produkt, **42**, 43, 93
- Sequenz, **6**
  - Bilder-, **70**
  - exakte, **6**, **17**
  - Kunneth-, 86, 86
  - kurze exakte, 7
  - lange exakte, 26
  - Puppe-, 102

- Spektral-,
  - siehe* Spektralsequenz
  - universelle Koeffizienten-, 84, 84–86
- Serre-Spektralsequenz, 88, 89, 89, 90, 91, 93, 93, 95, 95
  - Funktorialitat, **93**
- Shapiros Lemma, 48
- Shuffle, **57**
- Shuffle-Produkt, **57**
- spalten, **7**
- Spektralsequenz, **74**, 76, 82, 92
  - Funktorialitat, **93**
  - Grothendieck-, 83, 92
  - Hochschild-Lyndon-Serre-,
    - siehe* Serre-Spektralsequenz
  - Konvergenz, 77, 81, 88
  - Kunneth, 85
  - Serre-, 88, 89, 89, 90, 91, 93, 93, 95, 95
  - starke Konvergenz, **77**
  - zusammenbrechen, **74**
- Sprache
  - blumige, **74**
- starke Konvergenz, **77**
- sterben, **74**
- Summe
  - amalgamierte, **16**
  - direkte, **3**
- symmetrische Algebra
  - graduiert, **55**
- symmetrische Gruppe, *51*, **89**
- teilbar, **11**
- Tensoralgebra
  - graduierte, **55**
- Tensorprodukt, **3**, **3**, 4, 4, **5**, 9
  - universelle Eigenschaft, **5**
  - von Ringen, **6**
- terminaler Ring, **2**
- terminales Objekt, **17**
- toten, **74**
- Tor, **29**, 30, **30**, 32
  - Komultiplikation, **61**
- totaler linksabgeleiteter Funktor, 105, **105**
- Totalkomplex, **31**
- Transfer, **48**, **49**
- Transferformel, 61
- Transgressionsatz, 95
- Transversale, **48**
- triangulierte Kategorie, **104**
- Tripel
  - abgeleitetes, 75, **75**, 76, 91
  - exaktes, 75, **75**, 76
  - multiplikatives exaktes, 91, **91**, 92
- Über-kategorie, **16**
- überleben, **74**
- universelle Eigenschaft
  - Kolimes, **65**
  - Koprodukt, 3, 6
  - Produkt, 3, 6
  - Tensorprodukt, 5
  - totaler linksabgeleiteter Funktor, **105**
- universelle Koeffizientensequenz, 84, 84–86
- Unter-Kategorie, **16**
- Verbindungshomomorphismus, **26**, 27
- Vergissfunktor, **15**, 45, 46, **47**
- Verschiebung
  - Dimensions-, **29**
- vollstaendige Filtrierung, **71**
- Vorzeichenkonvention, 31
- Weylgruppe, **51**
- Yoneda-Ext, **33**
- Yoneda-Lemma, **45**
- Yoneda-Produkt, **36**
- Zahl
  - $p$ -adische, **12**
  - $p$ -lokale, **12**
- zentraler Grenzwertsatz, 77
- zentraler Konvergenzsatz, 77
- zerfällt, **7**
- Zickzack-Diagramm, **100**
- Zielabbildung, **13**
- zusammenbrechen, **74**

*INDEX*

zusammenziehbarer Komplex, **102**  
Zykel, **22**  
zyklische Gruppe, 4, 38, 57