# Übungen zur Funktionentheorie I

## — Blatt 9 —

Helmut Hamm, Tilman Bauer 30. Mai 2006

---

**Übung 1.** (a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklungen um 0 und deren Konvergenzradien für die Funktionen $\log(1+z^2)$ und $\sqrt{1+z}\,\log(1+z)$.

(b) Die Funktion $\frac{z}{\sin z}$ ist in $z = 0$ holomorph fortsetzbar. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe um $z = 0$.

**Übung 2.** Wo haben folgende Funktionen isolierte Singularitäten? Geben Sie für alle isolierten Singularitäten den Typ an; bestimmen Sie für Pole die Polordnung.

(a) $\exp\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)$

(b) $\dfrac{1}{\cos(1/z)}$

(c) $\dfrac{e^{i\pi z} - z}{(z^2-1)^2}$

**Übung 3.** Sei $f\colon \mathbf{R} - \{x_0\} \to \mathbf{R}$ eine Funktion, die eine holomorphe Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon \mathbf{C} - \{x_0\} \to \mathbf{C}$$

besitzt. Zeigen Sie: Hat $\tilde{f}$ einen Pol ungerader Ordnung bei $x_0$, so gilt

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = -\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \pm\infty \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Gilt die Umkehrung?

**Übung 4.** Berechnen Sie mit dem Residuensatz:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \sin t}{1 + 8\cos^2 t}\, dt$$

---

Frohe Pfingstferien! Abgabe bis Di, 13. Juni, 11:15 in den Briefkästen