

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE I

— BLATT 8 —

Helmut Hamm, Tilman Bauer

23. Mai 2006

Übung 1. Bestimmen Sie, ob die folgenden Gebiete sternförmig sind, und geben sie gegebenenfalls ein Zentrum an:

(a) $\{x + iy \in \mathbf{C} \mid (|x| + 1)(|y| + 1) < 2\}$

(b) der Ball vom Radius 1 um z_0 bezüglich einer beliebigen Metrik d auf \mathbf{C} , also

$$\{z \in \mathbf{C} \mid d(z, z_0) < 1\};$$

(c) $\{x + iy \in \mathbf{C} \mid xy < 1, x > 0, y > 0\}$.

Übung 2. Sei $K = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \leq 1\}$ eine halbe Kreisscheibe. Zeigen Sie, dass K ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand ist, und geben Sie einen Randzyklus an.

Übung 3. Zeigen Sie, dass der Cauchysche Integralsatz auch für Gebiete $U = U_1 \cup U_2$ gilt, wobei U_1 und U_2 sternförmig sind und $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend und nicht leer ist.

Übung 4. Berechnen Sie folgende Integrale, wobei $K = \{z \mid \operatorname{Re} z \geq 0, |z| \leq \frac{3}{2}\}$ sei:

(a) $\int_{\partial K} \frac{z^2}{z^2 + z - 2} dz;$

(b) $\int_{\partial K} \frac{z^2}{z^4 - 2z^2 + 1} dz.$