

# ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE I

## — BLATT 7 —

Helmut Hamm, Tilman Bauer

16. Mai 2006

---

**Übung 1.** Sei  $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  die obere Halbebene in  $\mathbf{C}$ . Zeigen Sie:

$$f: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C} - (]-\infty, -1] \cup [1, \infty[)$$
$$z \mapsto \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

ist biholomorph. Geben Sie die Umkehrfunktion an. (Achten Sie darauf, dass sie stetig ist!)

**Übung 2.** Ein Kaugummi klebt an einem Reifen Ihres Fahrrads. Wie verhält sich die Länge des Wegs, den der Kaugummi zurücklegt, zur gefahrenen Distanz des Fahrrads? Berechnen Sie dazu den Weg, den der Kaugummi nach einer Radumdrehung zurückgelegt hat.

**Übung 3.**

(a) Sei  $f(t) = \int_{\gamma} \frac{\exp(tz)}{z} dz$ , wobei  $\gamma$  den oberen Halbkreis um 0 von 1 nach  $-1$  parametrisiert. Berechnen Sie  $f'(t)$ .

(b) Sei  $\gamma: [-1, 2] \rightarrow \mathbf{C}$  gegeben durch  $\gamma(t) = \exp(\pi i t^2)$ . Berechnen Sie  $L(\gamma)$ .

**Übung 4.** Berechnen Sie  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$  für  $\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $\gamma(t) = t + \exp(2\pi i t)$ .

*Tipp:* Verwenden Sie nach Zerlegung des Weges geeignete Zweige des Logarithmus.