ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE I

— BLATT 6 —

Helmut Hamm, Tilman Bauer 9. Mai 2006

Übung 1. Bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen der holomorphen Funktionen sinh und cosh. Beweisen Sie das Additionstheorem

$$\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w).$$

Übung 2. In dieser Übung sollen Sie zeigen, dass nicht jede zusammenhängende, beschränkte, offene Menge in $\mathbf{C}$ mit zusammenhängendem Rand eine stetige Randkurve endlicher Länge besitzt. Sei $f\colon]0,1[\to \mathbf{R}$ gegeben durch

$$f(t) = t \sin \frac{\pi}{2t}$$

und sei $U = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ -2 < \operatorname{Im} z < f(\operatorname{Re} z)\}$.

(a) Skizzieren Sie U.

(b) Zeigen Sie, dass U beschränkt und offen ist.

(c) Zeigen Sie, dass ∂U unendliche Länge hat, indem Sie den Grenzwert der Längen des Graphen von $f|_{[\frac{1}{n},1[}$ für $n \to \infty$ nach unten abschätzen.

Tipp: Versuchen Sie nicht, die Länge genau zu berechnen, sondern schätzen Sie gegen die harmonische Reihe ab.

Übung 3. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \operatorname{Re}(z)\,dz$, wobei γ den Rand des Quadrates $[0,1] + [0,1]i$ in positiver Richtung durchläuft. (Wählen Sie dazu eine beliebige Parametrisierung dieses Randes.)

Übung 4. Beweisen Sie die folgende Abschätzung, wobei γ den Einheitskreis um 0 positiv umläuft:

$$\left| \int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^2}\,dz \right| \le 2\pi e.$$

Tipp: Beweisen und verwenden Sie dazu die Beziehung $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

Abgabe bis Di, 16. Mai, 11:15 in den Briefkästen