Übungen zur Funktionentheorie I

— Blatt 5 —

Helmut Hamm, Tilman Bauer 2. Mai 2006

Übung 1. Betrachten Sie die Reihe von Funktionen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, wobei $f_n \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definiert ist durch

$$f_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{n}; & \text{falls } \frac{1}{n+1} < |z| \leq \frac{1}{n} \\ 0; & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig, gleichmäßig–absolut, normal konvergent?

Übung 2. Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung um 0 von der rationalen Funktion

$$f(z) = \frac{2z^3 + 3z + 1}{2z^3 - 2}.$$

Tipp: Verwenden Sie die Partialbruchzerlegung $f(z) = p(z) + \frac{a}{z-z_1} + \frac{b}{z-z_2} + \frac{c}{z-z_3}$, wobei p ein Polynom und z_1, z_2, z_3 die Nullstellen des Nenners sind.

Übung 3. Bestimmen Sie alle Funktionen f, die in einer offenen Umgebung von 0 definiert sind, sich dort in eine Potenzreihe entwickeln lassen und die Differenzialgleichung $z^2 f'(z) = f(z)^2$ erfüllen. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Setzen Sie $f(z)$ als eine Potenzreihe an und berechnen Sie beide Seiten. Bestimmen Sie durch Koeffizientenvergleich die Koeffizienten der Reihe. Drücken Sie dann das Resultat möglichst einfach durch elementare Funktionen aus.

Übung 4. Die allgemeine Potenzfunktion $(a, x) \mapsto a^x$, $a \in \mathbf{C}^*$, $x \in \mathbf{C}$ sei definiert durch $a^x = e^{x \log a}$. Zeigen oder widerlegen Sie das folgende Potenzgesetz: $(a^x)^y = a^{xy}$.

Abgabe bis Di, 9. Mai, 11:15 in den Briefkästen