Übungen zur Funktionentheorie I

— Blatt 4 —

Helmut Hamm, Tilman Bauer 25. April 2006

Übung 1. (a) Bestimmen Sie eine auf $\mathbf{C}$ holomorphe Funktion f, so dass

$$\mathrm{Re}(f(z)) = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

gilt (wobei $z = x + iy$).

(b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f(z) = u(z) + iv(z)$ auf $\mathbf{C}$, für die es zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktionen $g(x)$ und $h(y)$ gibt, so dass $u(z) = g(x) + h(y)$ (wobei wieder $z = x + iy$).

Übung 2. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$ konvergiert, aber nicht absolut. Berechnen Sie den Grenzwert.

Tipp: Denken Sie an die Taylorreihen von $\log x$ oder $\arctan x$.

Übung 3. Betrachten Sie die Reihe $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+k^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(z)$ auf $\mathbf{R}$ gleichmäßig konvergiert.

(b) Bestimmen Sie die Menge U aller $z \in \mathbf{C}$, für die die Reihe $f(z)$ definiert ist. Zeigen Sie, dass $f(z)$ in U punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Übung 4. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ auf allen kompakten Mengen gleichmäßig konvergiert, die den Einheitskreis nicht schneiden.

Tipp: Zeigen Sie die gleichmäßige Konvergenz auf $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r\}$ (für $r < 1$) und auf $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \geq R\}$ (für $R > 1$).

Abgabe bis Di, 2. Mai, 11:15 in den Briefkästen