Übungen zur Funktionentheorie I

— Blatt 3 —

Helmut Hamm, Tilman Bauer 18. April 2006

Übung 1. Die *koendliche Topologie* auf einem Raum X ist definiert durch

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid X - U \text{ ist eine endliche Menge}\} \cup \{\emptyset\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ tatsächlich eine Topologie definiert.

(b) Beschreiben Sie, wie konvergente Folgen in der koendlichen Topologie aussehen.

(c) Eine Topologie heißt *hausdorffsch*, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ disjunkte Umgebungen von x und y in X gibt. Für welche Räume X ist die koendliche Topologie hausdorffsch?

Übung 2. Wo sind folgende Funktionen reell bzw. komplex differenzierbar?

(a) $f(z) = (z-1)\,|z|^2$;

(b) $f(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)$;

(c) $f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}}; & z \neq 0 \\ 0; & \text{sonst} \end{cases}.$

Übung 3. Zeigen Sie für reell differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ die Kettenregel in Wirtinger-Schreibweise:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z}(z) = \frac{\partial g}{\partial w}(f(z))\frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(z))\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z)$$

und

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial g}{\partial w}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(f(z))\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z).$$

Übung 4. Sei $f^\circ\colon]0,\infty[\times\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ eine reell differenzierbare Funktion, die sich schreiben lässt als $f^\circ(r,\phi) = f(re^{i\phi})$ für ein $f\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$. Schreibe $f^\circ = u^\circ + iv^\circ$. Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph ist, wenn gilt:

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v^\circ}{\partial \phi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v^\circ}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u^\circ}{\partial \phi}.$$

Abgabe bis Di, 25. April, 11:15 in den Briefkästen