Übungen zur Funktionentheorie I

— Blatt 2 —

Helmut Hamm, Tilman Bauer 11. April 2006

Übung 1. Sei $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die zwei Definitionen von Stetigkeit äquivalent sind:

(a) Zu jedem $z \in \mathbf{C}$, $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $w \in \mathbf{C}$ mit $|z - w| < \delta$ gilt, dass $|f(z) - f(w)| < \epsilon$.

(b) Urbilder offener Mengen unter f sind wieder offen.

Übung 2. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Teilmengen von $\mathbf{R}^2$ mit der Teilraumtopologie zusammenhängend bzw. sogar wegzusammenhängend sind:

(a) $\mathbf{Q} \times \{0\}$;

(b) Der Graph von $\sin(1/x)$ $(x > 0)$ vereinigt mit $\{0\} \times [-1,1]$;

(c) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{Z} \text{ oder } y \in \mathbf{Z}\}$.

Übung 3. Sei $U \subseteq \mathbf{R}^n$ eine offene Teilmenge. Zeigen Sie, dass es dann eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ gibt, so dass U und A homöomorph sind (d.h. es gibt eine bijektive stetige Abbildung $f\colon U \to A$, deren Umkehrfunktion ebenfalls stetig ist).

Tipp: Betrachten Sie für $U \neq \mathbf{R}^n$ die Funktion, die jedem $x \in U$ den Abstand zu $\mathbf{R}^n - U$ zuordnet.

Übung 4. (a) Wo ist $f(z) = (|z| - 1)\arg(z)$ stetig?

(b) Existiert $\lim_{z \to 0} f(z)$, wobei $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ gegeben ist durch $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$?

(c) Wo ist $f(z) = |z|^2$ komplex differenzierbar?

Abgabe bis Di, 18. April, 11:15 in den Briefkästen