Übungen zur Funktionentheorie I

— Blatt 11 —

Helmut Hamm, Tilman Bauer 20. Juni 2006

Übung 1. Wie viele Nullstellen hat die Funktion

$$f(z) = z^5 - 10z^4 + 41z^3 - 86z^2 + 88z - 31$$

in $B_1(2)$, dem Kreis mit Radius 1 um $z_0 = 2$?

Übung 2. Sei $U \in \mathbf{C}$ ein Gebiet, das spiegelsymmetrisch an der reellen Achse ist, also $z \in U \Rightarrow \overline{z} \in U$. Sei $f\colon \{z \in U \mid \operatorname{Im} z \geq 0\} \to \mathbf{C}$ eine stetige Funktion mit $f(U \cap \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{R}$, so dass $f|_{\{z \in U \mid \operatorname{Im} z > 0\}}$ holomorph ist. Zeigen Sie, dass durch

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z); & \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \overline{f(\overline{z})}; & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

eine holomorphe Fortsetzung auf U definiert wird.

Tipp: Satz von Morera.

Übung 3. Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eine ganze Funktion und p ein Polynom mit $|f(z)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in C$, so ist auch f ein Polynom, dessen Grad höchstens der Grad von p ist.

Tipp: Benutzen Sie die Cauchyschen Ungleichungen.

Übung 4. Welche der folgenden Funktionen lassen sich holomorph fortsetzen?

(a) $(z - \frac{\pi}{2}) \tan z$ in $z = \frac{\pi}{2}$;

(b) $z^2 \sin \frac{1}{z}$ in $z = 0$;

(c) $\frac{\cos(z-1)}{z^2}$ in $z = 0$

Abgabe bis Di, 27. Juni, 11:15 in den Briefkästen