Übungen zur Funktionentheorie I

— Blatt 10 —

Helmut Hamm, Tilman Bauer 13. Juni 2006

Übung 1. Gegeben sei eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbf{C} - (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}) \to \mathbf{C}$, die doppelt periodisch ist: $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{res}_0 f = 0$ gilt.

Tipp: Integrieren Sie über den Rand eines geeigneten Quadrats.

Übung 2. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)^2}{1+x^4}\,dx$ und

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\,dx \quad (a \in \mathbf{R}^+)$.

Übung 3. Bestimmen Sie die Parzialbruchzerlegung von

$$f(z) = \frac{3z+1}{z^3 - iz^2 + 2z}.$$

Berechnen Sie daraus die Laurententwicklungen dieser Funktion um $z_0 = 0$ und $z_0 = 1$.

Übung 4. Geben Sie explizit eine auf $\mathbf{C}$ meromorphe Funktion an, die genau bei jeder natürlichen Zahl ($\neq 0$) einen Pol hat, und zwar

(a) zweiter Ordnung;

(b) erster Ordnung (*Tipp:* benutzen Sie (a) und Integration).

Abgabe bis Di, 20. Juni, 11:15 in den Briefkästen